Lycée Soukrine	*Devoir N°1*	*$4^{éme}$ sc . exp2*
M^{elle}. El Abed		*2010-2011*

Exercice 1 :

1. Montrer que : $i + e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}$; $(\alpha \in \mathbb{R})$
2. Soit (E_α) : $z^2 - (2i + e^{i\alpha})\,z + ie^{i\alpha} - 1 = 0$; $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

   a. Résoudre dans $\mathbb{C}$: (E_α) (on notera z' et z'' les solutions de (E_α) tq Re(z')=0)

   b. Ecrire z' et z '' sous forme exponentielle.
3. On considère les points A(i) et B($i + e^{i\alpha}$) et soit I=A*B déterminer et construire l'ensemble des points I.
4. Dans cette question on prendra $\alpha = 0$ (E_0) : $Z^2 - (1+2i)\,Z + i - 1 = 0$

   a. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z^n = i)$ et $(z^n = 1 + i)$

   b. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ $\left(z^n - 2i + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Exercice 2 :

Soit (O,$\vec{u}$, $\vec{v}$) un repère orthonormé de P et l'application :

$$f: \quad \mathbb{C}\{-i\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z) = \frac{z}{1-iz} = z$$

1. Déterminer et construire les ensembles E={ M(z) / (z+i)z'∈ $\mathbb{R}_-^*$ } et F={ M(z) / arg$\left(\frac{f(z)}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{4}$ (π) }
2. Soient A(-i) , B(i) , M(z) et M'(z') .

   a. Montrer que AM .BM'=1 et que ($\vec{u}$, $\overrightarrow{BM'}$)+ ($\vec{u}$, $\overrightarrow{AM}$) $\equiv 0\ (2\pi)$

   b. En déduire l'ensemble des points M de P lorsque M varie sur le cercle $C_{\left(A,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ et l'ensemble des points M' de P lorsque M∈ $[AI)\backslash\{A\}$
3. a. Déterminer les racines cubiques de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

   b. Soit $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Ecrire sous forme exponentielle $\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$

   c. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ (E) : $(f(z))^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
4. a. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ (G) : $\frac{f(z)}{i-z} = \frac{1}{2\,cos\alpha}$, $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

   b. Quel est l'ensemble des points M' et M'' images des solutions de (G) quand α varie ?

Exercice 3:

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + \frac{2}{U_n} \end{cases} \quad , n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad U_n \geq 1$
2. On considère les suites (V_n) et (W_n) définies par $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

   a. montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad V_n \leq 2$

   b. Montrer que (V_n) est une suite croissante.

   c. Prouver que (W_n) est une suite décroissante et minorée par 2.
3. a. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad V_n \leq W_n \quad et\ que \quad V_n W_n \geq 3.$

   b. Montrer que : $W_n - V_n \leq 2\left(\frac{W_{n-1} - V_{n-1}}{V_{n-1} W_{n-1}}\right)$

   c. Montrer alors que : $W_n - V_n \leq \frac{2}{3}(W_{n-1} - V_{n-1}) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

   d. Déduire que les deux suites V et W sont convergentes vers la même limite.

   Calculer alors sa limite.