Lycée Soukrine	***Devoir N°2***	$4^{ème}$ ***sc . exp2***
M^{elle}. El Abed		***2010-2011***

Exercice 1:

Soit U la suite réelle définie sur ℕ par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\frac{3+4U_n{}^2}{6+U_n{}^2}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

1. a. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq 1$.
   b. Etudier la monotonie de U, en déduire qu'elle est convergente.
2. a. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ona $0 < 1 - U_{n+1} \leq \frac{2}{2+\sqrt{2}}(1 - U_n)$
   b. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; 1 - (\frac{2}{2+\sqrt{2}})^n \leq U_n < 1$ puis calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$
3. Soit V la suite réelle définie sur ℕ par $V_n = \frac{1-U_n^2}{3+U_n{}^2}$
   a. Montrer que V est une suite géométrique.
   b. Exprimer V_n en fonction de n, en déduire U_n en fonction de n.

Exercice 2 :

Soient $\mathcal{P}$ le plan rapporté à un R.O.N directe (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) et f l'application de $\mathcal{P}/\{O\}$ dans $\mathcal{P}$ qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z^2-4}{2z}$

1. a. Mq : si ($z \neq 2i$) alors on a l'égalité $\frac{z'+2i}{z'-2i} = \left(\frac{z+2i}{z-2i}\right)^2$.
   b. On désigne par A et B les points d'affixes 2i et -2i.
   Justifier que $(\overrightarrow{M'A}\ ,\ \overrightarrow{M'B}) \equiv 2\ (\overrightarrow{MA}\ ,\ \overrightarrow{MB})(2\pi)$ et que $\frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA}\right)^2$
   En déduire l'ensemble des points M pour lesquels z' est un imaginaire pure.
2. Soit I le point d'affixe $z_0 = -4 + 2i$
   a. Déterminer $(\overrightarrow{IA}\ ,\ \overrightarrow{IB})$ et $\frac{IA}{IB}$.
   b. Déterminer et construire l'ensemble E={ M(z) ∈ $\mathcal{P}$ tel que |z+2i|=2|z-2i| }
   c. En utilisant les questions précédentes, construire l'image I' de I par f.
3. Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
   a. Résoudre dans ℂ l'équation (E) : $z' = 2i \sin\theta$.
   On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $\mathrm{Re}(z_1) > 0$.
   b. Ecrire sous forme exponentielle z_1 et z_2 affixes respectives des points M_1 et M_2. Verifier que $z_2 = -\overline{z_1}$
   c. Montrer alors que BM_1M_2 est un triangle isocéle de sommet principal B.
4. On pose $Z = i\left(\frac{z'+2i}{z'-2i}\right)$ et $z' = 2e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
   a. Exprimer Z en fonction de θ
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} Z^k$, discuter suivant les valeurs de θ , $\lim_{n\to\infty} U_n$