EXERCICE NI L'espace euclidien E est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Que peut-on dire des points: O ; A ; B et C dans les cas suivants:

a) $\vec{OB}.\vec{OC} = 0$ b) $\vec{OB} \wedge \vec{OC} = \vec{0}$ c) $\vec{OA}.(\vec{OB} \wedge \vec{OC}) = 0$

On considère les points: A(- 2 ; 1 ; 1) ; B(1 ; - 1 ; 0) et C(- 2 ; 0 ; 0)

1) Déterminer l'équation du plan P contenant A ; B et C

2) Déterminer l'angle entre P et le plan d'équation $z = 0$

Une sphère K a son centre en $\Omega(3 ; - 4 ; t)$ et son intersection avec le plan $z = 0$ est un cercle de rayon 3

3) Déterminer l'équation de la sphère (K)

4) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la sphère (K) et l'axe z'Oz n'ont aucun point en commun

5) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la sphère (K) et le plan: $- x + 4y + z - 2 = 0$ ont exactement un point en commun

Soit (S) la sphère pour laquelle les deux conditions de 4) et 5) sont réalisées

6) Déterminer une équation du plan qui est tangent à la sphère (S) et est parallèle au plan: $- x + 4y + z - 2 = 0$, mais distinct de ce dernier

7) Déterminer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCΩ

EXERCICE NII On considère une famille de fonctions réelles définies par: $f_\lambda : x \mapsto e^{2x} - (\lambda + 1) e^x + 3\lambda$ avec λ , paramètre réel vérifiant $\lambda > - 1$

On note F_λ la représentation graphique de la fonction f_λ dans un repère orthonormé

a) On considère d'abord le cas où $\lambda = 0$

i) Etudier f_0 et F_0 : ensemble de définition, signe, asymptote, intersection avec les axes,

croissance, décroissance, extremum
Préciser les coordonnées du point d'inflexion

ii) En déduire le tracé de F_0

iii) k étant un réel strictement négatif, déterminer l'aire $A(k)$ du domaine plan D_k, compris entre F_0, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = k$ et $x = 0$

iv) Déterminer $\lim\limits_{k \to -\infty} A(k)$

v) k étant un réel strictement négatif, déterminer $V(k)$, le volume du solide S_k, engendré par la

rotation de D_k autour de l'axe (Ox)

vi) Déterminer $\lim\limits_{k \to -\infty} V(k)$

b) Montrer que les courbes F_λ, ont toutes une asymptote parallèle à l'axe des abscisses

c) Pour chaque valeur de $\lambda > -1$, déterminer l'abscisse du point M_λ de F_λ qui a une tangente parallèle à l'axe des x et montrer que cette abscisse correspond à un minimum pour la fonction f_λ

EXERCICE NIII

On donne la fonction d'une variable réelle x : $f : x \mapsto \begin{cases} (x^2+1)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

F est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm)

a) Etudier: i) La continuité de f en $x = 0$ ii) La dérivabilité de f en $x = 0$

b)i) Etudier la fonction f (Limites aux bornes de son domaine de définition, l'asymptote de F, sens de variation de f, extremum et les points d'inflexion de F)

ii) Esquisser le graphe de f

c)i) Déterminer l'abscisse des points d'intersection de F et de la droite $d : y = 1 - \frac{x}{2}$

ii) $0 < \lambda \leq e^{\frac{1}{2}}$

Exprimer en fonction de λ , l'aire $A(\lambda)$ du domaine $D = \left\{ M(x;y) / \begin{cases} \lambda \leq x \leq e^{\frac{1}{2}} \\ 1 - \frac{x}{2} \leq y \leq 1 - x\ln x \end{cases} \right\}$

iii) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda)$

EXERCICE NIV

1)a) Déterminer le domaine de définition de la fonction: $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$

b)i) Démontrer que f est une fonction impaire et périodique de période 2π

ii) Démontrer que le graphe de f admet la droite d'équation: $x = \dfrac{\pi}{2}$, comme axe de symétrie

iii) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\left] 0 ; \dfrac{\pi}{2} \right]$

iv) Construire le graphe de f sur $[-\pi ; \pi]$

2)a) Déterminer les réels a ; b et c tels que: $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{ -1 ; 1 \}$ $\dfrac{x^2}{x^2 - 1} = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$

b)i) Calculer l'aire du domaine D , limité par le graphe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$

(On effectuera le changement de variable: $u = \cos t$, dans l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\, dt$)

ii) Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{2} \right]$

c) Calculer la mesure du volume du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses (On montrera que: $\dfrac{\cos^4 t}{\sin^2 t} = \dfrac{1}{\sin^2 t} - 2 + \sin^2 t$,

puis on effectuera le changement de variable: $u = \tan t$, dans l'intégrale: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 t}\, dt$