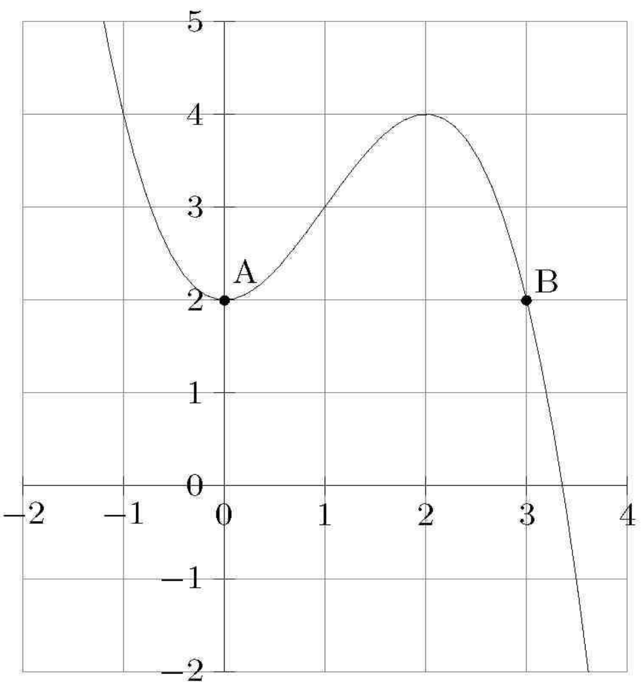
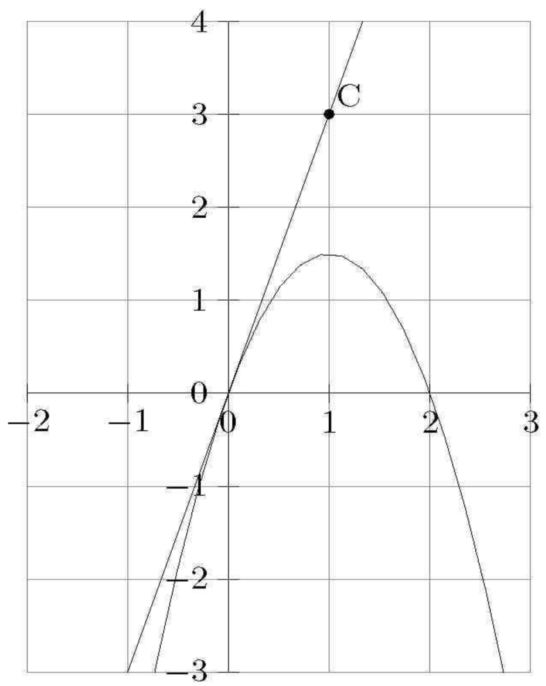
Lycée Ibn Rachiq Kairouan	DEVOI R DE SYNTHESE N : 1	sadfi M^{ed} Ahmed
SECTION : 4 Sc3	DUREE 2 H	LE : 06 / 12 / 2008

EXERCICE : 1 **(3 points)**

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f ’et f ’’ les dérivées première et seconde de f

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la courbe représentative de f.	La courbe Γ ci-dessous est la courbe courbe représentative de f'.
	
	La droite (OC) est tangente à Γ en O

1) dresser le tableau de variation de la fonction f

2) détrminer l’équation de la tangente a ζ_f en B et calculer f ’’ (0)

3) montrer que ζ_f admet un point d’inflexion I que l’on précisera

EXERCICE :2 **(5 points)**

on considère la fonction g définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \sqrt{2\,\text{cotg}(x)}$

1) déterminer le domaine de dérivabilité de g et calculer g’ (x)

2) montrer que g réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l’on précisera

3) a) calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$ et $(g^{-1})'(\sqrt{2})$

b) montrer que g^{-1} est dérivable a droite en 0

c) montrer que g^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{-4x}{4 + x^4}$

VOIR SUITE AU VERSO

EXERCICE :3 (6 points)

soit la fonction f définie sur $[\,0\ ,+\infty\,[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$

On désigne par ζ_f sa courbe dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 4 cm)

1) a – étudier la dérivabilité de f a droite de 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu

b – montrer que f et dérivable sur $]\,0\ ,+\infty\,[$ et que $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x}}$

c – dresser le tableau de variation de f

2) a – Montrer que f réalise une bijection de $[\,0\ ,+\infty\,[$ sur un intervalle J que l'on précisera

on note f^{-1} sa fonction réciproque

b – montrer que f^{-1} est dérivable sur J

c – expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

3) a – montrer que l’équation $f(x) = x$ admet dans $[\,0\ ,+\infty\,[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$

b – Construire ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère

EXERCICE :4 (6 points)

Soit m un réel non nul.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - (1 + m^2) = 0$

2) Pour tout nombre complexe z, on pose : $f(z) = z^3 - 3iz^2 - (3 + m^2)z + i(1 + m^2)$.

a) Vérifier que f(i) = 0 ; en déduire une factorisation de f(z).

b) Résoudre dans C l'équation f(z) = 0.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o\,;\vec{u}\,;\vec{v})$

On considère les points A, M' et M'' d'affixes respectives i, i + m et i - m .

a) Vérifier que A est le milieu du segment [M' M''] .

b) Montrer que le triangle OM'M'' est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle OM'M'' soit équilatéral.