Mathématiques	Devoir De Synthèse N° 1	Lycée secondaire : Rue Fattouma Bourguiba Monastir
$4^{ème}$ Sc-Exp 3		
Mr : Abbes		09 / 12 / 2009 , 2^{H}

Exercice N°1 : (5 points)

1) Donner la forme exponentielle des nombres complexes $u = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $v = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}$.

2) Soit $\theta \in \left]0 , \quad \right[$. On considère l'équation dans $\mathbb{C}$: (E_θ) : $z^2 - 2z + 1 - e^{i2\theta} = 0$.

   a) Montrer que $1 - e^{i2\theta} = 2\sin\theta \; e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$.

   b) Sans calculer les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_θ), montrer que

   $$\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2} \; [2\pi] .$$

   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) .

Exercice N°2 : (4 points)

Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 4$.
   b) Etudier la monotonie de u sur $\mathbb{N}$.
   c) En déduire que u est convergente et calculer sa limite ℓ .

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < 4 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.

   c) Retrouver alors la valeur de ℓ .

Exercice N°3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty , -2]$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + x$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Interpréter ce résultat graphiquement

3) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -2 et interpréter le résultat graphiquement.
   b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty , -2[$ et que pour tout $x \in \;]-\infty , -2[$,

   $$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} + 1 .$$

   c) Montrer que pour tout $x \in \;]-\infty , -2[$, $f'(x) < 0$.

4) a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Tracer la courbe ζ_f de f dans un repère ON.

5) Montrer que l'équation $f(x) = x + 1$ admet dans $]-\infty,-2]$ une seule solution α et que $-3 < \alpha < -2$

6) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty , -2]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
   b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Feuille à compléter et à remettre avec la copie

Nom : …………………………….. **Prénom :** …………………………

Exercice N° 4 : (5 points)

La figure ci-dessous est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

I/ Cocher la bonne réponse.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 0 ☐ c) $+\infty$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 0 ☐ c) $+\infty$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 0 ☐ c) $+\infty$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$ ☐ a) -1 ☐ b) 1 ☐ c) $+\infty$

2. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - 2}{x} =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 0 ☐ c) $+\infty$

   $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - 2}{x} =$ ☐ a) $-\infty$ ☐ b) 0 ☐ c) $+\infty$

II/

1) Compléter au dessous le tableau de variation de f.

2) Déterminer l'équation de l'asymptote

   oblique à ζ_f : y = ……… x + ……….. .

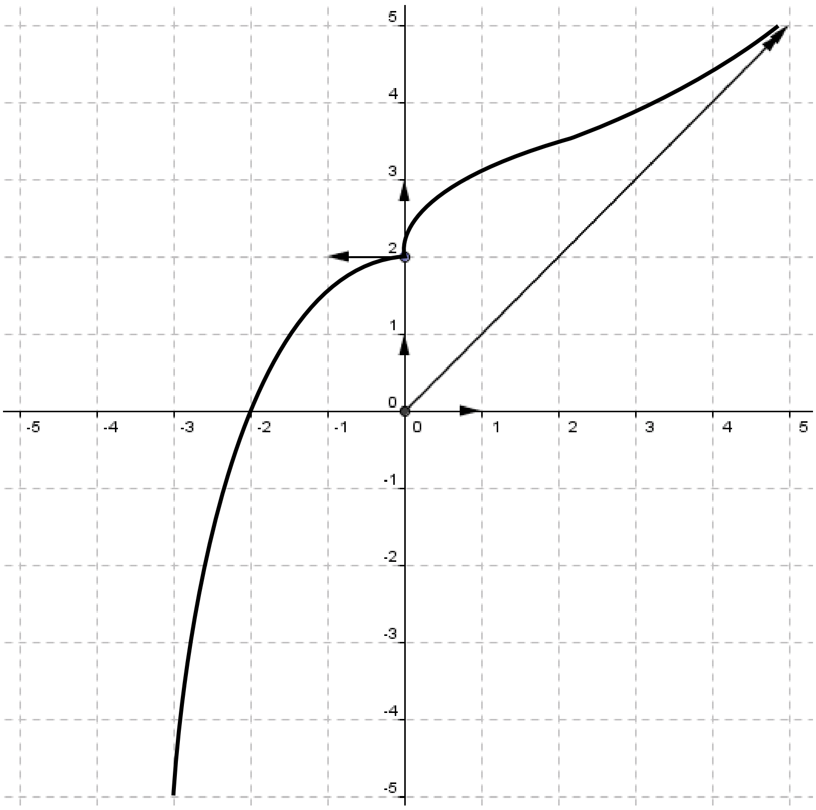
3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J ?

…………………………………………………………………

…………………………………………………………………

J = ………………………………

   b) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère que ζ_f .



x	
f '(x)	
f(x)	