

Lycées Tahar Sfar et Ibn Sina Mahdia	Devoir de synthèse n° 1 Mathématiques	Classe : 4 ^{ème} Sc exp
Date : 09 / 12 / 2009	Profs : Mme Turki et Mrs Baccar, Hamza et Meddeb	Durée : 2 heures

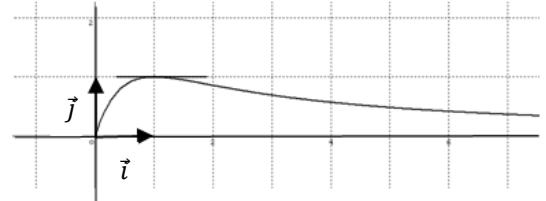
Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chacune des propositions suivantes, répondre par vrai ou faux sans justification.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note sera ramenée à zéro.

- 1) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.

La courbe représentative de sa fonction dérivée f' dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est donnée par le graphique ci-contre.



Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f .

a/ f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

b/ Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de \mathcal{C} .

c/ \mathcal{C} a une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0.

- 2) Soit g une fonction dérivable sur IR_+ telle que, pour tout $x \in IR_+$, $-\frac{2}{3} \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}$.

On a alors, pour tout $x \in IR_+$

a/ $-\frac{2}{3}x \leq g(x) \leq \frac{1}{3}x$.

b/ $|g(x) - g(0)| \leq \frac{2}{3}x$.

c/ Si $g(0) = 0$, alors la courbe représentative de g est comprise entre les droites d'équations :

$$y = \frac{-2}{3}x \text{ et } y = \frac{1}{3}x.$$

Exercice n°2 : (5,5 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . unité graphique : 2cm.

- 1) On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^3 = 8$.

- 2) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par :

$$a = 2, \quad b = -1 + i\sqrt{3} \text{ et } c = -1 - i\sqrt{3}.$$

a/ Déterminer la forme exponentielle de chacun des nombres complexes b et c .

b/ Placer les points A, B et C dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- 3) Soit B' le point d'affixe $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

a/ Montrer que le triangle ABB' est rectangle et isocèle en A .

b/ Placer le point B' dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- 4) Soit M le milieu de $[BB']$, on désigne par m l'affixe de M .

a/ Montrer que $m = \frac{(1+\sqrt{3})}{2} (1 + i\sqrt{3})$.

b/ En déduire que les points O , C et M sont alignés.

Exercice n°3 : (4,5 pts)

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par : $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$.

- 1) a/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et à droite en (-1) .
b/ Interpréter géométriquement les résultats.
- 2) a/ Montrer que f est dérivable sur $] -1, 1[$ et calculer $f'(x)$.
b/ Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, 1[$ une solution unique α .

Exercice n°4 : (7 pts)

On considère les suites U et V définies sur IN par :

$$U_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in IN \quad V_n = \frac{2}{U_n} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

- 1) Calculer : V_0, U_1, V_1, U_2 et V_2 .
- 2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in IN$, on a : $\begin{cases} 1 \leq U_n \leq 2 \\ \text{et} \\ 1 \leq V_n \leq 2 \end{cases}$
- 3) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)}$. [1] (On pourra remarquer que : $U_n \cdot V_n = 2$).
- 4) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in IN$, on a : $U_n > V_n$.
- 5) Montrer que U est décroissante et que V est croissante.
- 6) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \leq 1$.
En déduire que $(U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n$. [2]
- 7) En utilisant les relations [1] et [2], montrer que, pour tout $n \in IN$, on a :

$$U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4} (U_n - V_n).$$

En déduire que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

- 8) Montrer que les deux suites U et V sont convergentes vers la même limite ℓ qu'on calculera.

Bonne chance