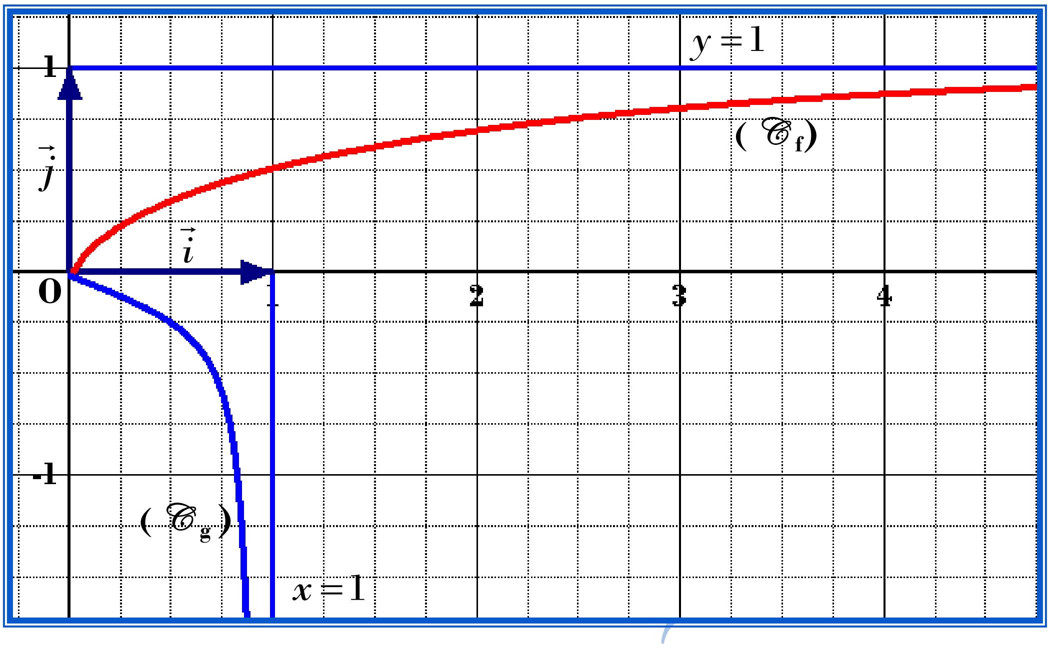
Lycée Secondaire Ali Zouaoui	**Devoir de synthèse N°01** **Durée 02 h**	Classe : $4^{ème}$ Sciences

EXERCICE N° 01 (4 pts)

-I-

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous on a tracer les courbes représentatives de deux fonctions f et g



Répondre par vrai ou faux

1- a) $D_f = [0,1[$

b) $D_g =]-\infty,0]$

c) $g\circ f([0,1]) = \left[-\frac{1}{4},0\right]$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (g\circ f)(x) = 1$

2- $g\circ f$ est décroissante sur $[0,+\infty[$

3- L'équation $g\circ f(x) = -\frac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$

-II-

1- Soit le nombre complexe $z = -2e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors :

a) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

b) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

c) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\frac{\ }{6}[2\ \ ]$

2- L'ensemble des points d'affixes le nombre complexe z tel que : $\left|\bar{z}+2-i\right| = \left|z-1-3i\right|$ est :

a) La médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(-2-i)$ et $B(1+3i)$

b) La médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(2-i)$ et $B(1-3i)$

c) La médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(2+i)$ et $B(-1-3i)$

EXERCICE N° 02 (5 pts)

Soit $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\cos(\ \ x)}{x-1} & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x^2+x+2}-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

α

2- a) Montrer que $\forall x<1$, on a : $\dfrac{x+1}{x-1} \leq h(x) \leq 1$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.

3- Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

α

4-a) $\pi\alpha$ Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet au moins une solution $\in \left]-\frac{1}{2},0\right[$.

b) En déduire que $\sin(\ \ \ ) = -\sqrt{1-\ \ ^2}$.

EXERCICE N° 03 (6 pts)

Soit $\varphi(z) = z^3 - [2\cos(\theta)+i]z^2 + [1+2i\cos(\theta)]z - i$; $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

1- a) Vérifier que i est une solution de l'équation $\varphi(z)=0$.

b) En déduire alors les deux autres solutions de l'équation $\varphi(z)=0$.

2- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(i)$, $B(e^{i\theta})$ et $C(e^{-i\theta})$

a) Déterminer le réel θ_0 pour lequel le quadrilatère $OABC$ est un parallélogramme.

b) Vérifier que le parallélogramme ainsi obtenu est un losange.

π

EXERCICE N° 04 (5 pts)

Soit $\Psi(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$; $x\in[-1,+\infty[$

1- Justifier que Ψ est croissante sur $[-1,+\infty[$.

2- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=\Psi(u_n) \end{cases}$; $n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $0<u_n<u_{n+1}<1$

b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1}-1|\le\dfrac{1}{2}|u_n-1|$.

d) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|u_n-1|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-1|$.

e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Bon Travail….✍