| Lycée rue Fattouma Bourguiba Monastir | Devoir de synthèse n°:1 4 Sc |
|---|---|
| | **MATHEMATIQUES** |
| **Mme Haddad-Mr Kammoun-Mr Dally** | **Le 8/12/2010** **DUREE : 2 h** |

## <u>Exercice 1 :</u> (4 points)

**A]** Dans chacune des questions suivantes une seule des trois propositions est correcte.

L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre la réponse choisie .

1) Sachant que $e^{i\theta}$ est une solution de l'équation : $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$, alors l'autre solution est :

a) $i\cos\theta$ b) $i\, e^{i\theta}$ c) $e^{-i\theta}$

2) Sachant que $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ alors un argument de $i\cos\theta$ est :

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{2} + \theta$.

3) Soit a un nombre complexe non nul. Si α est une racine carrée de a alors l'autre racine carrée de a est

a) $-\alpha$ b) $\overline{\alpha}$ c) $i\alpha$

4) Soit $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ alors $\left|1 + e^{i2\theta}\right|$ est :

a) $2\cos\theta$ b) $-2\cos\theta$ c) 2

**B]** Répondre par **vrai** ou **faux** .

1) Soit f une fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = x^2\sin(x)$.

L'équation $f'(x) = \frac{\pi}{2}$ admet au moins une solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

2) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe représentative de la fonction : $f : x \mapsto (x - x^2)(x-3)$ admet exactement deux tangentes horizontales.

3) La suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n.\sin(\frac{1}{n})$ est convergente.

4) Soit $(u_n)$ une suite tel que $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont convergentes. Alors $(u_n)$ est convergente.

## <u>Exercice 2 :</u>(5 points)

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1) Calculer $u_1$ et $u_2$ .
2) Etudier la monotonie de $(u_n)$.
3) On pose $f(x) = x - x^2$. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{1}{n+2}\right) \le \frac{1}{n+3}$.
4) Montrer par récurrence que , pour tout n de $\mathbb{N}$ , $0 < u_n \le \frac{1}{n+2}$.
5) Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)$.

## **Exercice 3 :** (6 points)

Soit f la fonction définie sur ¡ par $f(x) = 1+\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

1) a. Montrer que f est dérivable sur ¡ et que pour tout x ∈ ¡ , $f'(x) = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

2) a. Montrer que f réalise une bijection de ¡ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b. Expliciter $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour x ∈ J.

   c. Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(1)$.

3) Montrer que pour tout x ∈ ¡ , |f'(x)| Â $\dfrac{1}{2}$.

4) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α ∈ $[1,2]$.

5) On définit la suite réelle $(u_n)$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ .

   a. Montrer que pour tout n ∈ ¥ , $|u_{n+1} - \alpha|$ Â $\dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

   b. En déduire que pour tout n ∈ ¥ , $|u_n - \alpha|$ Â $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n |2-\alpha|$.

   c. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

## **Exercice 4 :** (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ .

1) a. Donner le module et un argument de $-2 + 2i\sqrt{3}$.

   b. Donner sous forme exponentielle les racines quatrièmes de $-2 + 2i\sqrt{3}$.

2) On considère dans Ê , l'équation (E) : $z^2 - (-1 + 2i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

   a. Sans calculer les solutions z' et z'' de (E) , montrer que $|z'.z''| = 4$ et $\arg(z'.z'') \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

   b. Donner la forme cartésienne de $(3 - 2i\sqrt{3})^2$ ..

   c. Résoudre alors l'équation (E).

3) On note A le point d'affixe 1 , B le point $-2 + 2i\sqrt{3}$ et C le point d'affixe c où c est le nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$ et de partie réelle $\dfrac{5}{2}$.

   a. Déterminer le module de c puis écrire c sous la forme cartésienne.

   b. Déterminer $\dfrac{AB}{AC}$ et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

   En déduire la nature du triangle ABC.