Lycée Soukrine Teboulba	CLASSE : 4 ^{me} *Sciences Expérimentales 2*
DEVOIR DE SYNTHESE N°1	EPREUVE : ***MATHEMATIQUES***
Melle **El Abed Amel**	Durée : ***2h*** — DATE : 08/12/2010

Exercice N°1 :(3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

L'élève indiquera le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

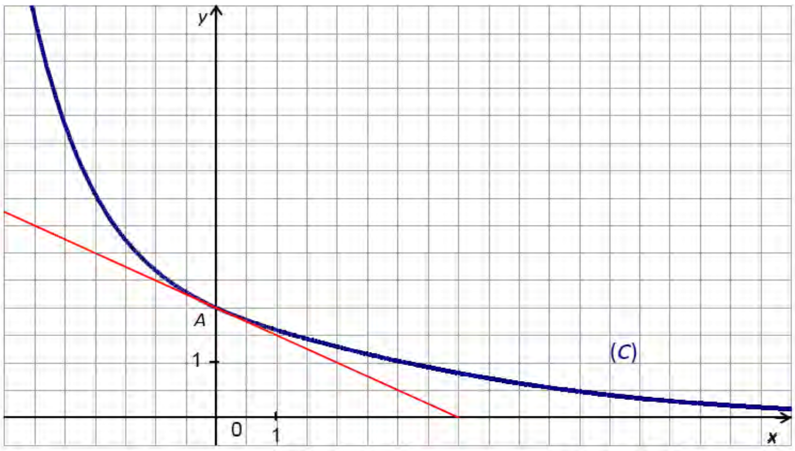
1. Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ la bijection de $]2, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$:

   a) $f^{-1}(y) = \frac{-2y^2}{1-y^2}$ **b)** $f^{-1}(y) = \frac{2y^2}{1-y^2}$ **c)** $f^{-1}(y) = \frac{-2y^2}{y^2-1}$

2. Les racines quatrièmes de -16 sont :

   a) $\begin{cases} z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{2k\pi}{4})} \\ k \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})} \\ k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} z_k = 2e^{i(\pi+\frac{2k\pi}{4})} \\ k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$

3. La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



1. $(f^{-1})'(2) = -2$ **b)** $(f^{-1})'(2) = -\frac{1}{2}$ **c)** $(f^{-1})'(2) = 2$

Exercice N°2 : (3 points)

Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2-U_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$

2. Montrer que la suite (U_n) est décroissante

3. En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite l

Exercice N°3 : (3 points)

Soit la fonction g définie sur E=$]1,+\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution $\propto \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$

2. Montrer que : $|g'(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in]1, +\infty[$

3. En déduire que : $\forall x \in]1, +\infty[\quad |g(x) - \propto| < \frac{1}{2}\,|x - \propto|$

Exercice N°4 : (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur [-1,1[par $f(x) = \frac{1}{1-\sin(\frac{\pi}{2}x)}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2}$ pour tout $x \in [-1,1[$
2. Etudier les variations de f et tracer (C) (dans le repère donné (**voir Annexe page 3**)).
3. **a**. Montrer que f réalise une bijection de [-1,1[sur un intervalle J que l'on précisera.

   b. Construire dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe représentative $C_{f^{-1}}$ de f^{-1}.
4. **a.** Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f^{-1}(1)$.

   b. f^{-1} est-elle dérivable à droite en $\frac{1}{2}$.

   c. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{2}{\pi x\sqrt{2x-1}}$.

Exercice N°5 : (4.5 points)

$$p(z) = z^3 - (1 - 2\sin\propto)z^2 + (1 - 2\sin\propto)z - 1 \qquad \propto \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

1. **a.** vérifier que p(1)=0

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $p(z) = 0$ (**indication :** $4\sin^2\propto - 4 = (2i\cos\propto)^2$)

   c. Ecrire sous forme exponentielle les solutions de (E).
2. dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un R .O .N direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère les points $M_0(1)$, $M_1\left(e^{i(\propto+\frac{\pi}{2})}\right)$ et $M_2\left(e^{-i(\propto+\frac{\pi}{2})}\right)$.

   Déterminer l'ensemble des points M_1 et M_2 lorsque $\propto$ varie dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Nom et prénom ....**N° :**.................................

Annexe