Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira		Année scolaire : 2010-2011
Epreuve : Mathématiques	**Devoir de synthèse n° 1**	Durée : 2 heures
Professeur : Maâtallah	Date : Le 09-12-2010	Classe : 4 Sc 3

Exercice n°1 :(3 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. La justification est demandée.

1) Le nombre complexe $a = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ est une racine :

a) Huitième de l'unité b) Sixième de l'unité c) Quatrième de l'unité

2) Pour tout réel , l'équation (E) : $iz^2 + e^{i\alpha}z + 1 = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions z_1 et z_2 on a donc :

a) $z_1 + z_2 = ie^{i\alpha}$ b) $z_1 . z_2 = i$ c) $z_1 + z_2 = -ie^{i\alpha}$

3) Soit z' et z'' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{6}$. On a alors :

a) $\frac{z''}{z'}$ est réel b) z'.z'' est réel c) z'.z'' est imaginaire pur .

Exercice n°2 :(4 points)

Soit θ un réel de $[0,\pi]$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_θ): $z^2 - (3cos\theta + 3 - 3i)z + 9cos\theta - 9i = 0$.

1) Vérifier que $z_0 = 3$ est une solution de (E_θ) puis déterminer l'autre solution z_1 .

2) Dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, soit A et M d'affixes respectives $z_A = 3$ et $z_M = 3cos\theta - 3i$.
Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ décrit $[0 , \pi]$. Déterminer θ pour que le triangle OAM soit rectangle en O .

Exercice n°3 :(7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{x^2-2x+5})^3}$.

b) Montrer que I (1,0) est un centre de symétrie de (C_f) . Donner une équation de la tangente à (C_f) en I .

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Construire les courbes (C_f) de f et $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1} .

3) a) Montrer que $\forall\, x \in]-1,1[$: $f^{-1}(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Montrer que f^{-1} admet des primitives sur $]-1,1[$. Déterminer la primitive F de f^{-1} égale à 1 en 0 .

Exercice n°4 :(6 points)

Soit f une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a représenté dans la page suivante et dans un repère orthogonal , les courbes de f et F .

1) a) Justifier que $(\mathcal{H})$ est la courbe de F puis dresser son tableau de variation .

b) Justifier que F admet quatre points d'inflexion . Ecrire une équation de la tangente à la courbe de F au point d'inflexion d'abscisse $x_0 \in]1,6[$.

2) a) Montrer que la restriction g de F à $]-\infty, 1]$ admet une fonction réciproque.

b) Déterminer graphiquement : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{g^{-1}(x)}{x}\right]$, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{g^{-1}(x)}{x}\right]$ et $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{g^{-1}(x)-1}{x-1}\right]$.

c) Construire la courbe de g et la courbe de g^{-1} dans un repère orthonormé $\boldsymbol{R}$.

3) Soit la fonction U définie sur $]-\infty, 0]$ par : $U(x) = F^2(x) + 2F(x) - 3$.

a) Etudier les variations de U . Montrer que : $U(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 0]$ une solution unique $\alpha < -\frac{1}{2}$.

b) Montrer que : $\alpha = g^{-1}(-3)$. Résoudre , alors , sur le graphique du repère $\boldsymbol{R}$, $U(x) = 0$.

4) Soit $V(x) = F(2tan^2(x))$ et (Γ) sa courbe dans un repère orthogonal .

a) Justifier qu'il suffit d'étudier V sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Dresser le tableau de variation de V.

b) Construire la partie de (Γ) sur $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira		Année scolaire : 2010-2011
Epreuve : Mathématiques	Devoir de synthèse n° 1	Durée : 2 heures
Professeur : Maâtallah	Date : Le 09-12-2010	Classe : 4 Sc 3