LYCEE SECONDAIRE Gzala	DEVOIR DE SYNTHESE N1 DE MATHEMATIQUES	**Date :** 8 Décembre 2010
		Proposé par : Mr : WALID J.
	4éme sc	**Durée :** 2heures

Exercice n° : 1 (3 points)

Pour chaque question choisir la seule réponse correcte

1) On considère le nombre complexe : $Z=-\frac{\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{i\pi}{3}}$ .alors on a :

a) $|Z|=1$.   b) $Z=-(1-i)e^{\frac{i\pi}{3}}$.   c) Le réel $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de *Z*.

2) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur I=[2 ; 5] ; f (2) =4 et f (5) =12 alors l'équation f(x) = 19

a)Admet au moins une solution dans I ; b) Admet une seule solution dans I; c) N'admet pas des solutions dans I

3) Le module de nombre complexe : 4 - 3i est égal à :

a) 1 ; b) 5 ; c) $\sqrt{7}$

4) Le nombre complexe $\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$ est égal

a) 1   b) $\cos^2\theta$ c) $\cos 2\theta$

Exercice 2 : (6 points)

1) Résoudre dans C l'équation : $\frac{1}{2}z^2-(1+2i)z-3=0$.

2) On considère dans C l'équation : $(E): z^3-4(1+i)z^2+2(-1+4i)z+12=0$.

a- Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

b- Résoudre dans C l'équation (E).

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A ,B et C d'affixes respectives $z_A=2$; $z_B=3+3i$ et $z_C=-1+i$.

a- Placer sur une figure les points A, B et C.

b- Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle.

4) Soit $\theta\in]0,\pi[$ et l'équation $(E_\theta): z^2-2z+1-e^{i2\theta}=0$.

a- Résoudre (E_θ). On notera z_1 et z_2 les solutions avec $I_m(z_1)<0$.

b- Déterminer les formes exponentielles de z_1 et z_2.

c- Déduire l'ensemble (F) des points $M(z_1)$ lorsque θ décrit $]0,\pi[$.

Exercice3: (3points)

Soit la fonction f définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1} & si\ \ x\in]-\infty,-1] \\ f(x)=x+\frac{5}{2}+\sqrt{1-x^2} & si\ \ x\in]-1,0] \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue en -1.

b) Etudier la dérivabilité de f en -1.

2) a) Déterminer les expressions de f ' (x) sur $]-\infty,-1[$ puis sur $]-1,0]$.

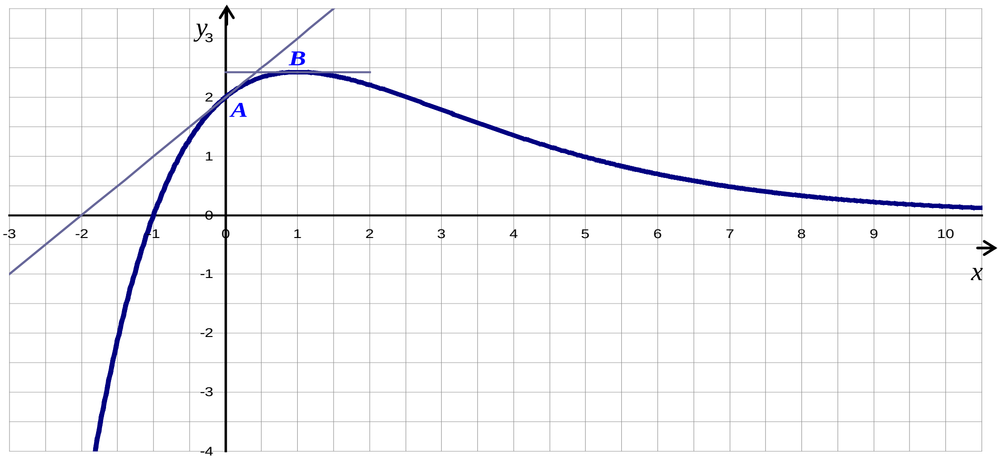
b) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice4 :(4 points)

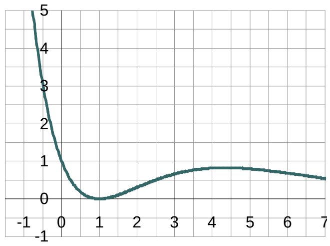
La courbe C_f ci-dessous représente une fonction *f* définie et dérivable sur *IR*. On note f' la dérivée de la fonction *f*. On sait que :

- la courbe coupe l'axe des ordonnées au point *A* et la tangente à la courbe au point *A* passe par le point de coordonnées (−2 ; 0) ;
- la courbe admet au point *B* d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;

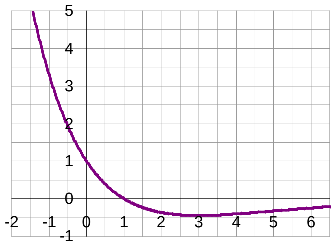
– l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C_f .



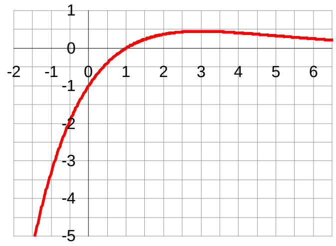
1. A partir du graphique et des renseignements fournis :
   a. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b. Déterminer $f\left([0,+\infty[\right)$ et $f\left(]-\infty,1]\right)$
   c. Déterminer $f'(0)$ et $f'(1)$.
   d. Déterminer une équation de la tangente à C au point A
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f'. Déterminer laquelle. En justifiant votre choix



Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{3-2x}{-x+1}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4. Soit g la fonction définie sur $IR\setminus\{1\}$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ Dresser le tableau de variation de g

Exercice n°5(5 points)

on considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \dfrac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \end{cases}$$

1) On suppose que : $0 < V_n$ pour tout n de IN

   a) Montrer que pour tout n de IN on a : $V_n < U_n$

   b) Montrer que (U_n) est strictement décroissante c) Montrer que (V_n) est strictement croissante

2) a) Montrer que: $U_{n+1} - V_{n+1} < \dfrac{1}{2}(U_n - V_n)$ et en déduire que : $0 < (U_n - V_n) < \dfrac{1}{2^n}(U_0 - V_0)$

   b) Déterminer la limite de $(U_n - V_n)$

   c) Que peut on dire des suites (U_n) et (V_n)

3) Préciser la limite commune l de (U_n) et (V_n)