L.S. 07/11/1987
Profs : Kilani. M
Najjar. T

Devoir de Synthèse n°1
Mathématiques
A-S : 2010/2011

4 Sc. Exp

Durée : 2 heures

-Il est recommandé de soigner la rédaction et la présentation de la copie-

EXERCICE : n°1 *(3 points)*

Répondre par vrai au faux :

1) Soit z un nombre complexe, on a : $|z+i| = |\bar{z}-i|$.

2) Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation : $z^2 - iz + 3 = 0$ alors $\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) Les solutions de l'équation $z^4 = -16$ sont. $z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})}$ $k \in \{0,1,2,3\}$.

4) Si $z = -3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$. Alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

EXERCICE : n° 2 *(6 points)*

A) Pour tout z de $\mathbb{C}$, on pose $f(z) = 2z^3 - 2(1+i)z^2 + (1+2i)z - i$.

1) Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ une solution imaginaire pure z_0.

2) a) Déterminer trois nombres réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout complexe *z* on a :

$$f(z) = (z-i)(az^2 + bz + c).$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

B) 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - 2(1-\cos\theta)z + 1 - \cos\theta = 0$; avec $\theta \in]0,\pi[$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On considère les points M' et M'' d'affixes respectives $z' = \frac{1}{2}(1-\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z'' = \frac{1}{2}(1-\cos\theta - i\sin\theta)$

a) Calculer $|z' - \frac{1}{2}|$ et $|z'' - \frac{1}{2}|$ et en déduire que les points M' et M'' appartiennent à un même cercle que l'on caractérisera.

b) Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle.

c) On considère Les points A, B et C du plan d'affixes respectives $Z_A = i$, $Z_B = 2z'$ et $Z_C = 2z''$ Déterminer les réels θ pour que ABCO soit un parallélogramme.

EXERCICE : n°3*(6 points)*

I- Soit g la fonction définie par. $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, pour tout $x \in IR$.

1/ Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

2/ Dresser le tableau de variation de g .

3/ En déduire que pour tout. $x \in IR$, $g(x) > 0$

II- Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

1/a- Déterminer sur quel ensemble la fonction f est dérivable.

b- Montrer que pour tout $x \in IR$. $f'(x) = g(x)$.

c- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

d- Dresser le tableau de variation de f

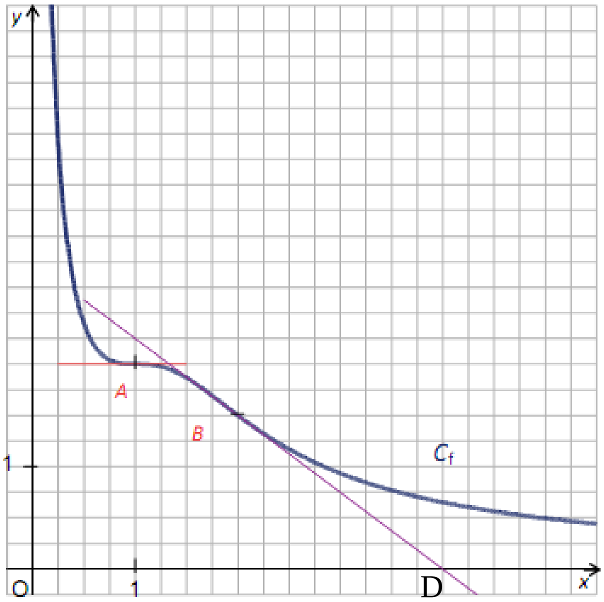
2/ a- Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle I que l'on précisera.

b- Déterminer les domaines de continuité et de dérivabilité de f^{-1}, fonction réciproque de f.

c- Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

d- Calculer $(f^{-1})'(1)$.

e- Expliciter $f^{-1}(x)$, pout tout $x \in I$



EXERCICE : n°4(*5 points)*

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction f dérivable et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. On sait que la courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1, la tangente à la courbe C_f au point $B\left(2,\frac{3}{2}\right)$ passe par le point D (4 ; 0)

Par les lectures graphiques

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) la fonction f admet-elle des points d'inflexions ? Justifier.

2) a) Justifier que la fonction f est une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f définie sur J.

Déterminer $f^{-1}(\frac{3}{2})$ et $f^{-1}(2)$.

c) Vérifier que f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$ et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(\frac{3}{2})$.

d) Déterminer sur quel ensemble f^{-1} est dérivable.

3) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{x}$ et h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=gof(x)$.

a) Vérifier que h est dérivable en 1 et déterminer $h'(1)$.

b) Déterminer le sens de variation de h sur $]0;+\infty[$.