LYCEE SECONDAIRE OTMAN CHATTI M` SAKEN	DEVOIR DE SYNTHESE MATHEMATIQUES N° 1	Date : 08 Novembre 2010
		Proposé par:Mrs: Salah Mohsen, Gmati Saber
	$4^{éme}$ Sciences	Durée : 2 h

Exercice 1 :

Pour chacune des questions suivantes une seule de trois réponses proposées est exacte

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie

Aucune justification n'est demandée

1) Le nombre complexe : $-\sqrt{3}+3i$ à pour argument :

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{7\pi}{6}$

2) La suite U_n définie par $U_n = -\frac{1}{2}(\pi-4)^n$ à pour limite :

a) 0 b) $-\infty$ c) $-\frac{1}{2}$

3) Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par : f(x) = sinx , alors : $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ est égale à :

a) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ b) -2 c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 2 :

1) Soit α étant un réel de l'intervalle $[0,\pi]$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation, $(E_\alpha) : z^2 + (2\sin\alpha)\, z + 1 = 0$

2) On considère le polynôme P(z) défini par: $P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)\, z^2 + (1-2\sin\alpha)\, z - 1$.

a) Calculer P(1).puis déterminer les réels, a et b tels que : $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation P(z)=0.On donnera les solutions sous forme exponentielle

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_1 = 1$; $z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$; $z_3 = -\sin\alpha - i\cos\alpha$.

a) Montrer que l'on a : ABC est isocèle en B si et seulement si, $2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$.

b) Déduire les valeurs de α pour lesquelles ABC est isocèle en B.

Exercice 3:

Soit la fonction définie sur $]-2,2[$ par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]-2,2[$ et que $f'(x)=\dfrac{4}{(\sqrt{4-x^2})^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que pour tout $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, $|f'(x)|\leq\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

d) En déduire que l équation f(x) = 2x admet une unique solution $\alpha\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$

2) Soit la suite (U_n) définie sur IN par $\begin{cases} U_0\in[\alpha,1] \\ U_{n+1}=\dfrac{1}{2}f\,(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in IN,\alpha\leq U_n\leq 1$

b) Montrer que pour tout $n\in IN$, $|U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\,|U_n-\alpha|$

c) En déduire que pour tout $n\in IN$, $|U_n-\alpha|\leq(\dfrac{2\sqrt{3}}{9})^n\,|U_0-\alpha|$

d) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n$

Exercice 4:

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par ; $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$

1) a)Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$

c) Explicité $f^{-1}(x)$ pour tout $x\geq 1$

2) On considère la fonction g définie sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$ par $g(x)=f^{-1}(\dfrac{1}{\cos x})$

a) Montrer que pour tout $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}[$ on a $g(x)=1+\operatorname{tg}x$

b) Montrer que g réalise une bijection de $[0,\dfrac{\pi}{2}[$ sur $[1,+\infty[$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que

$(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$ pour tout $x\in[1,+\infty[$