**Exercice n°1 : (3 points)**
Choisir la lettre qui indique l'unique bonne réponse et sans justification.

1) Soit la fonction f définie sur IR par f(x) = $\sqrt{x^2+1}$ .

a) f ' (x)= $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) f ' (x)= $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

c) f ' (x)= $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

2) Soit la fonction f définie sur par f(x) = $\sqrt{x^2+1}$

a) f est bijective de [-1, +∞ [ sur [2, +∞ [ et $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-1}$

b) f est bijective de [0, +∞ [ sur [1, +∞ [ et $f^{-1}(x)=-\sqrt{x^2-1}$

c) f est bijective de [0, +∞ [ sur [1, +∞ [ et $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-1}$

3) Soit f(x) = $\sqrt{x}$ avec x Є [1,+ ∞[ et on suppose que $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$ alors pour tout x de[1,+ ∞[ on a ;

a) $|x-1|\leq\frac{1}{2}|\sqrt{x}-1|$

b) $|\sqrt{x}-1|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

c) $|\sqrt{x}-4|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

**Exercice : (6 points)**
Soit l'équation ($E_x$) : $z^3-3iz^2-(3+e^{i2x})z+i(1+e^{2ix})=0$ où $x\in[-\pi,\pi[$

1) a)Vérifier que i est une solution de ($E_x$).

b) Vérifier que : $z^3-3iz^2-(3+e^{i2x})z+i(1+e^{2ix})=(z-i)[z^2-2iz-(1+e^{2ix})]$.

c) Résoudre dans C l'équation ($E_x$).

2) Dans le plan complexe munie d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points I , M et N d'affixe respectifs : $z_I=i$ , $z_M=i-e^{ix}$ et $z_N=i+e^{ix}$ .

a) Montrer que I est le milieu de [MN]

b) Montrer que si x varie dans $[-\pi,\pi[$ alors M varie sur un cercle de centre I dont on déterminera son rayon.

c) En déduire l'ensemble des points N lorsque M varie sur le cercle.

3) Dans la suite on suppose que **x =0**.

a) Ecrire $\dfrac{z_M}{z_N}$ sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle OMN.

**Exercice : (5 points)**

On considère les deux suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies pour tout entier naturel n par:

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3} \text{ , } V_0 = 7 \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}$$

1) On considère la suite $(W_n)$ définie pour tout entier naturel n par $W_n = V_n - U_n$.

Montrer que la suite $(W_n)$ est géométrique de raison $\frac{5}{12}$ .

2) Montrer que pour tout n Є IN: $V_n \geq U_n$.

3) Montrer que $(U_n)$ est croissante et que $(V_n)$ est décroissante.

5) Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

6) On considère à présent la suite $(T_n)$ définie pour tout entier naturel n par $T_n = 3\ U_n + 4\ V_n$.

a) Démontrer que la suite $(T_n)$ est constante et donner sa valeur.

b) En déduire la limite des suites $(U_n)$ et $(V_n)$.

**Exercice : (6 points)**

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)= \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ .

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x)= \dfrac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$

b) Etudier les variations de f.

c) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) On note $f^{-1}$ la fonction réciproque de f.

a) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur ]-1, 1[.

b) Dresser le tableau de variation de $f^{-1}$.

c) Calculer f (1) puis calculer $(f^{-1})'\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

d) Montrer que l'équation : $f^{-1}(x) = 0$ admet une unique solution $x_0$ dans]-1, 1[ et déterminer sa valeur.

e) Donner une équation de la tangente à la courbe de $f^{-1}$ au point A d'abscisse $x_0$

3) Soit la fonction h définie sur]-1, 1[ par $h(x) = f^{-1}\left(Sin(\frac{\pi}{2}x)\right)$

Montrer que h réalise une bijection de] -1,1[ dans IR.

**Bon travail**