Lycée de Souassi

* * *

DEVOIR DE SYNTHESE N° 1

* * *

08/12/2010

SECTIONS : 4ème *Sciences Expérimentales* **2 & 3**
EPREUVE : *Mathématiques*
DUREE : 2 *heures*
PROFESSEUR : *Mr Wissem Fligène*

Exercice 1 : (3 pts)

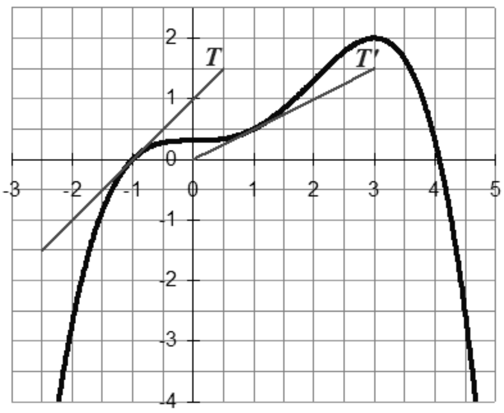
Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis ***justifier cette réponse****.*

Une réponse non justifiée est considérée comme fausse.

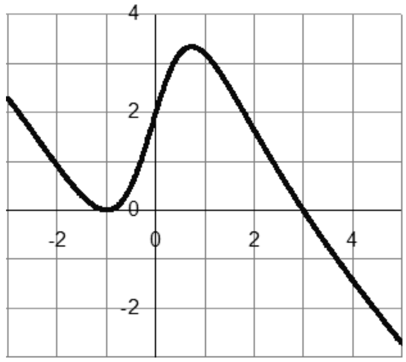
On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

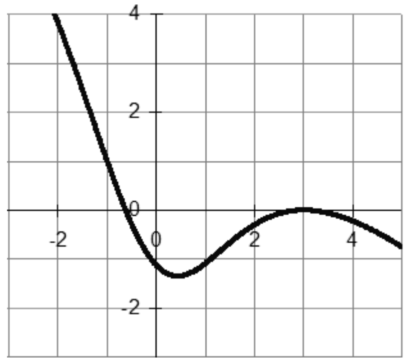
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	2 ↘	$-\infty$

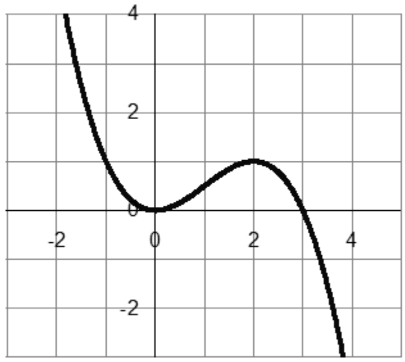
1) L'équation $f(x)=0$ admet :
   A. une solution B. deux solutions C. trois solutions
2) On note f' la dérivée de la fonction f. On peut affirmer que :
   A. $f'(-2)\times f'(1)\leq 0$ B. $f'(2)\times f'(5)\geq 0$ C. $f'(4)\times f'(7)\geq 0$
3) On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction . Les droites T et T' sont tangentes à la courbe aux points d'abscisses respectives -1 et 1



   A. $f'(-1)=0$ B. $f'(-1)=2\times f'(1)$ C. $f'(1)=2\times f'(-1)$
4) Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f'. Déterminer laquelle.
   A. courbe C_1 B. courbe C_2 C. courbe C_3







Exercice 2 : (5 pts)

On définit les suites (U) et (V) par $\begin{cases} U_0=1 \\ V_0=2 \end{cases}$ et $\begin{cases} U_{n+1}=\dfrac{U_n+2V_n}{3} \\ V_{n+1}=\dfrac{U_n+4V_n}{5} \end{cases}$ pour $n\in\mathbb{N}$

On pose $W_n = V_n - U_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer que la suite (W) est géométrique et préciser sa limite
2) Exprimer W_n en fonction de n et en déduire que $U_n \leq V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ et $V_{n+1} - V_n$ en fonction de W_n
   En déduire le sens de variation des suites (U) et (V)
4) Justifier que (U) et (V) convergent vers la même limite ℓ.
5) On pose $T_n = 3U_n + 10V_n$, pour $n \in \mathbb{N}$
   a) Démontrer que la suite (T_n) est constante.
   b) En déduire la valeur de ℓ.

<u>Exercice 3</u> : (6 pts)

On considère l'équation (E) : $2z^2 - 4z + 3 - i\sqrt{3} = 0$

1) Calculer $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^2$
2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
   b) Ecrire les solutions sous forme exponentielle.
3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et C d'affixes respectives $\alpha = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}$
   a) Montrer que OAC est un triangle rectangle
   b) Déterminer l'affixe du point B tel que $OABC$ soit un rectangle
4) Soit l'équation (E_θ) : $z^2 - 2z - 2i\sin\theta\, e^{i\theta} = 0$; avec $\theta \in]0, \pi[$
   a) Montrer que : $2i\sin\theta\, e^{i\theta} = e^{2i\theta} - 1$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .On désignera par z' la solution ayant une partie imaginaire négative et par z'' l'autre solution
   c) Déterminer θ pour que l'on ait $z' = \alpha$ et $z'' = \beta$

<u>Exercice 4</u> : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}}$ et ζ_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Etudier les variations de f
   b) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
   c) Explicité $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.
   d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1,2[$.
2) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$, on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$
3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$
   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite qu'on précisera.

Solution

Solution-Exercice 1

1) B

f est strictement croissante sur $]-\infty,3]$ et $f(]-\infty,3]\,)=]-\infty,2]$ qui contient 0

D'autre part f est strictement décroissante sur $[3,+\infty[$ et $f([3,+\infty[\,)=]-\infty,2]$ qui contient 0

Donc $f(x)=0$ admet exactement deux solutions : -1 et une autre qui appartient à $[3,+\infty[$ $(\mathbf{0,75\ pt})$

2) C

f est strictement décroissante sur $[3,+\infty[$ donc $f'(x)<0$ pour tout $x\in[3,+\infty[$ en particulier

$f'(4)<0$ et $f'(7)<0$ donc $f'(4)\times f'(7)\geq 0$ $(\mathbf{0,75\ pt})$

3) B

Graphiquement : $f'(-1)=1$ et $f'(1)=\frac{1}{2}$ donc $f'(-1)=2f'(1)$ $(\mathbf{0,75\ pt})$

4) C

Sur $]-\infty,3]$, f est strictement croissante donc $f'(x)>0$ et par suite la courbe de f' est au dessus de l'axe des abscisses

Sur $[3,+\infty[$, f est strictement décroissante donc $f'(x)<0$ et par suite la courbe de f' est en dessous de l'axe des abscisses (donc la courbe C_2 est à écarter)

D'autre part $f'(-1)=1$ donc la courbe de f' passe par le point de coordonnées $(-1{,}1)$ qui est le cas de la courbe C_3 $(\mathbf{0,75\ pt})$

Solution-Exercice 2

1) $W_{n+1}=V_{n+1}-U_{n+1}=\frac{U_n+4V_n}{5}-\frac{U_n+2V_n}{3}=\frac{3U_n+12V_n-5U_n-10V_n}{15}=\frac{2V_n-2U_n}{15}=\frac{2}{15}(V_n-U_n)=\frac{2}{15}W_n$

Donc W_n est une suite géométrique de raison $q=\frac{2}{15}$ $(\mathbf{0,75\ pt})$

$q=\frac{2}{15}\in]-1,1[$ donc $\lim W_n=0$ $(\mathbf{0,25\ pt})$

2) $W_n=W_0q^n$ or $W_0=V_0-U_0=1$ donc $W_n=\left(\frac{2}{15}\right)^n$ $(\mathbf{0,5\ pt})$

$V_n-U_n=W_n=\left(\frac{2}{15}\right)^n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc $U_n\leq V_n$ $(\mathbf{0,5\ pt})$

3) $U_{n+1}-U_n=\frac{U_n+2V_n}{3}-U_n=\frac{2V_n-2U_n}{3}=\frac{2}{3}W_n$ $(\mathbf{0,5\ pt})$

$V_{n+1}-V_n=\frac{U_n+4V_n}{5}-V_n=\frac{U_n-V_n}{5}=-\frac{1}{5}W_n$ $(\mathbf{0,5\ pt})$

$U_{n+1}-U_n=\frac{2}{3}W_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc (U_n) est croissante $(\mathbf{0,25\ pt})$

$V_{n+1}-V_n=-\frac{1}{5}W_n\leq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc (V_n) est décroissante $(\mathbf{0,25\ pt})$

4) * $U_n\leq V_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

* (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante

* $\lim\ (V_n-U_n)=\lim\ W_n=0$

Donc (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes donc elles convergent vers la même limite ℓ $(\mathbf{0,5\ pt})$

5) a) $T_{n+1}=3U_{n+1}+10V_{n+1}=U_n+2V_n+2(U_n+4V_n)=3U_n+10V_n=T_n$

donc (T_n) est une suite constante $(\mathbf{0,5\ pt})$

b) (T_n) est une suite constante donc $T_n=T_0=3U_0+10V_0=23$ donc $3U_n+10V_n=23$ d'où

$3\ell+10\ell=23$ d'où $\ell=\frac{23}{13}$ $(\mathbf{0,5\ pt})$

Solution-Exercice 3

1) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2 = 1+2i\sqrt{3}-3 = -2+2i\sqrt{3}$ $(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$

2) a) $a = 2$; $b' = -2$; $c = 3- i\sqrt{3}$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 4-2\left(3- i\sqrt{3}\right) = 4-6+2i\sqrt{3} = -2+2i\sqrt{3} = \left(1+i\sqrt{3}\right)^2$$

donc $\delta' = 1+i\sqrt{3}$ est une racine carrée de Δ'

$z_1 = \frac{-b'-\delta'}{a} = \frac{2-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-b'+\delta'}{a} = \frac{2+1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{1-i\sqrt{3}}{2} ; \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right\}} \quad (\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$$

b) $z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ $(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$

$z_2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$; $|z_2| = \left|\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$

soit $\varphi \equiv \arg(z_2)[2\pi]$ donc $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ d'où $\varphi = \frac{\pi}{6}$; $z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ $(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$

3) a) * 1ière méthode :

$OA = |\alpha| = 1$; $OC = |\beta| = \sqrt{3}$ et $AC = |\ \beta - \ \alpha| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = 4$

$OA^2 + OC^2 = AC^2$ donc le triangle OAC est rectangle en O

* 2ième méthode :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)[2\pi] \equiv \arg\beta - \arg\alpha\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

* 3ième méthode :

$\frac{aff(\overrightarrow{OC})}{aff(\overrightarrow{OA})} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3}$: imaginaire pur donc $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$

cl : OAC est un triangle rectangle en O $(\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{pt})$

b) puisque OAC est un triangle rectangle en O alors il suffit que OABC soit un parallélogramme c.à.d.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ sig $z_B = \alpha + \beta = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} + \frac{3+i\sqrt{3}}{2} = 2$ $(\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{pt})$

4) a) $2i\sin\theta\, e^{i\theta} = 2i\ \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}e^{i\theta} = e^{2i\theta} - e^{i0} = e^{2i\theta} - 1$ $(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$

b) $a = 1$; $b' = -1$; $c = -2i\sin\theta\, e^{i\theta}$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 1 + 2i\sin\theta\, e^{i\theta} = 1 + e^{2i\theta} - 1 = e^{2i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2$$

donc $\delta' = e^{i\theta}$ est une racine carrée de Δ'

$z = \frac{-b'-\delta'}{a} = 1 - e^{i\theta} = 1-\cos\theta - i\sin\theta$ ou $z = \frac{-b'+\delta'}{a} = 1+e^{i\theta} = 1+\cos\theta + i\sin\theta$

or $Im(1-\cos\theta - i\sin\theta) = -\sin\theta < 0$ car $\theta \in]0,\pi[$

donc $\boldsymbol{z' = 1 - e^{i\theta}}$ et $\boldsymbol{z'' = 1 + e^{i\theta}}$ et $S_{\mathbb{C}} = \{z' ; z''\}$ $(\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$

c) $z' = \alpha$ sig $1-\cos\theta - i\sin\theta = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sig $\begin{cases} 1-\cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ sig $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$z'' = \beta$ sig $1+\cos\theta + i\sin\theta = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sig $\begin{cases} 1+\cos\theta = \frac{3}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ sig $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

comme $\theta \in]0,\pi[$ alors $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$ $(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$

Solution-Exercice 4

1) a) f est dérivable sur $[0,+\infty[$ (quotient et composée) et

$$f'(x) = 2\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}\right)^3} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ $(\mathbf{0,75\ pt})$

c) f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ alors f est une bijection de $[0,+\infty[$ $sur\ f([0,+\infty[) = \left]\lim_{+\infty} f\,, f(0)\right] =]0,2] = I$ $(\mathbf{0,75\ pt})$

c) $f^{-1}:]0,2] \longrightarrow [0,+\infty[$

$x \longmapsto f^{-1}(x) = y$ sig $f(y) = x$ sig $\frac{2}{\sqrt{1+y}} = x$ sig $\left(\frac{2}{\sqrt{1+y}}\right)^2 = x^2$ sig $\frac{4}{1+y} = x^2$ sig $\frac{1+y}{4} = \frac{1}{x^2}$ sig $1 + y = \frac{4}{x^2}$ sig $y = \frac{4}{x^2} - 1$

Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{4}{x^2} - 1\,;\, x \in]0,2]}$ $(\mathbf{0,75\ pt})$

d) Soit $g(x) = f(x) - x$

g est continue sur $[1,2]$

$g(1) \times g(2) = \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 2\right) < 0$

g est dérivable sur $[1,2]$ et $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[1,2]$

Alors l'équation $g(x) = 0$ cad $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1,2[$ $(\mathbf{0,75\ pt})$

2) $|f'(x)| = \left|-\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}\right)^3}\right| = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x}\right)^3}$

Or $x \in [1,2]$ donc $x \geq 1$ sig $x + 1 \geq 2$ sig $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{2}$ sig $\left(\sqrt{x+1}\right)^3 \geq 2\sqrt{2}$ sig $\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}\right)^3} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Donc pour tout $x \in [1,2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $(\mathbf{0,5\ pt})$

3) a) * pour $n = 0$, $1 \leq u_0 = 1 \leq 2$

* on suppose que $1 \leq u_n \leq 2$ montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

$1 \leq u_n \leq 2$ et f est strictement décroissante sur $[1,2]$ alors $\underbrace{f(2)}_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \leq f(u_n) \leq \underbrace{f(1)}_{\sqrt{2}}$

donc $1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2} \leq 2$ d'où $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

* cl : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$ $(\mathbf{0,75\ pt})$

b) f est dérivable sur $[1,2]$

pour tout $x \in [1,2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

u_n et $\alpha \in [1,2]$ alors $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$ or $f(\alpha) = \alpha$

donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$ $(\mathbf{0,5\ pt})$

c) * pour $n = 0$, $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 = 1$

* on suppose que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$, montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1}$

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1}$

* cl : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(\mathbf{0,75\ pt})$

$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2\sqrt{2}} \in]-1,1[$ donc $\lim \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n = 0$

d'où $\boxed{\lim u_n = \alpha}$ $(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$