Site web : http://www.devoir.tn	Devoir de Synthèse °01		
Lycée Ali Bourguiba Bembla	4 ème Sc 1	Mercredi 06-12-2011	Chortani Atef

Exercice 1(3 Points)

Répondre par "vrai" ou "faux" à chaque question. (Sans justification)

1) Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = x\,sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$; Alors

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} gof\,(x) = \frac{1}{4}$

2) Si $u_n = -v_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathrm{IN}^*$; alors les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3) Si f est une fonction décroissante sur un intervalle I et si g est une fonction

décroissante sur un intervalle J tel que g (J) $\subset$ I, alors gof est décroissante sur J.

4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A , z_B et z_C tel que $(z_A - z_B) = i\,(z_B - z_C)$.Alors le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Exercice 2(6 Points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

Interpréter graphiquement les deux résultats

2)a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c)Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

3)a)Montrer que pour tout réel $x \in [0;1]$ $f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0;1]$ une unique solution α

4)Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a , $u_n \in [0;1]$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$ puis déduire que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3n}\left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$.

c)Déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3(6 Points)

1)a)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + i = 0$

2) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ on considère l'équation d'inconnue z complexe

$(E): z^2 - 2e^{i\theta}\cos\theta\, z + e^{2i\theta} = 0$

a)Vérifier que 1 est une solution de E

b) En déduire l'autre solution de E

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$,on considère les points A et B et C d'affixes respectives : 1 , $e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$

a)Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

b) Montrer que le quadrilatère OACB soit un losange.

c)Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire de losange OBAC soit égale à $\frac{1}{2}$

Exercice 4(5 Points)

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle$]0,1[$. On considère la suite (u_n) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 1$

b) Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

2) Soit (v_n) la suite définie sur IN par: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison α

b) Exprimer v_n en fonction de n et α. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et α.

c) Retrouver alors la limite de la suite (u_n) quand n tends vers $+\infty$