LYCEE BENGUERDENNE ☺☺☺ DEVOIR DE SYNTHESE N°1 ☺☺☺

CLASSES : 4sc 1+2 ❄❄❄ DATE : 07-12-2011 ❄❄❄ DUREE : 2 heures

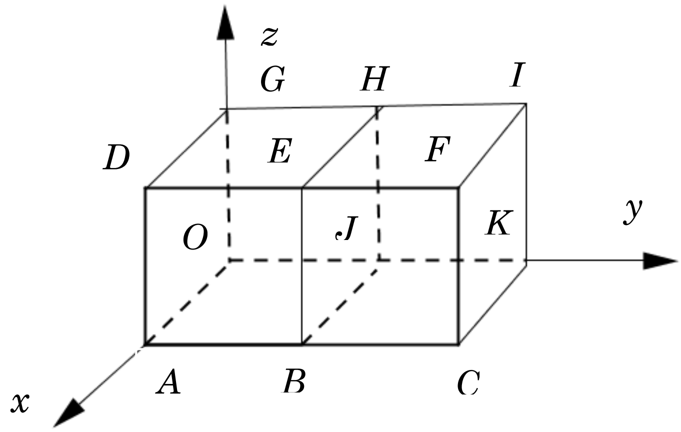
MATHEMATIQUES PROFESSEURS : OUERCHEFFANI+CHRIH

❄☺❄☺

EXERCICE N°1 (4.5 points)

Pour chaque question, une seule réponse proposée est exacte. Trouver la sans justification.

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OG})$ *on considère deux cubes accolés comme l'indique la figure ci-contre*



1) *Le triangle GBI est :*

a) *isocèle* b) *équilatéral* c) *rectangle*

2) *Le produit scalaire* $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{FC}$ *est égal à :*

a) 1 b) -1 c) 2

3) *Le vecteur* $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OF}$ *a pour coordonnées :*

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

4) *L'aire du triangle CGI est égal à :*

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

5) *Une représentation paramétrique de paramètre t de la droite (EK) est :*

a) $\begin{cases} x = t \\ y = 2+t \quad t\in\mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = t \quad t\in\mathbb{R} \\ z = 4t \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \quad t\in\mathbb{R} \\ z = 1-t \end{cases}$

6) *Le volume du tétraèdre HJKB est égal à :*

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{6}$ c) $\dfrac{1}{3}$

EXERCICE N°2 (4points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1+3i$, $z_B = -2$ *et* $z_C = \dfrac{-3+3i}{2}$

Soient M d'affixe z distinct de A et M' d'affixe $z' = \dfrac{z+2}{z+1-3i}$

1) *Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que M' appartienne à l'axe réel.*

2) a) *Montrer que, pour* $z \neq -1+3i$, *on a l'équivalence suivante :*

$$\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z-z_C)\left(\overline{z-z_C}\right) = \frac{5}{2}$$

b) *En déduire l'ensemble des points M (z) tel que M' appartienne à l'axe imaginaire. Construire cet ensemble.*

3) *Déterminer les points M d'affixe z tels que M = M'.*

EXERCICE N°3(5.5points)

1) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0$

2) *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *on considère les points A et B d'affixes respectives* $z_A = 1+i$ *et* $z_B = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$. *On désigne par* $\mathscr{C}$ *le cercle trigonométrique.*

a) *Ecrire* z_A *et* z_B *sous forme exponentielle*

Dans la suite de l'exercice, M *désigne un point de* $\mathscr{C}$ *d'affixe* $e^{i\theta}$ *où* $\theta \in [0,2\pi]$

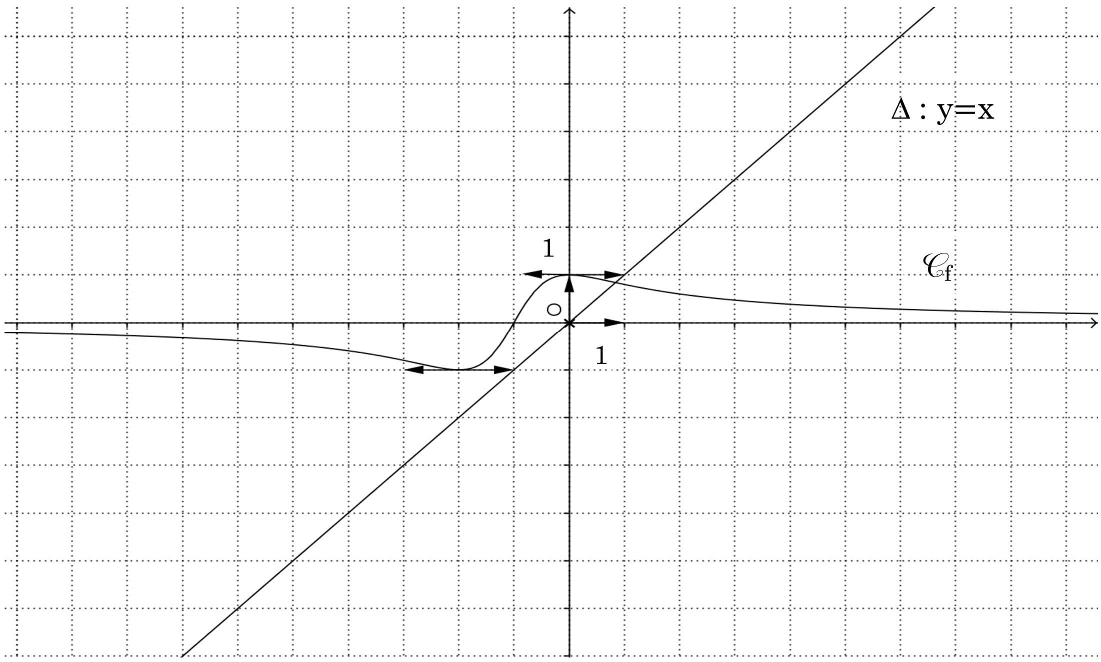
b) *Montrer que* $e^{2i\theta} - 1 = 2i\sin\theta\, e^{i\theta}$

c) *Montrer que* $MA\times MB = \left|e^{2i\theta}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\theta}\right|$*.En déduire que* $MA\times MB = \sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\theta\right)^2}$

d) *En déduire qu'il existe un point M de* $\mathscr{C}$*, dont on donnera l'affixe, pour lequel* $MA\times MB$ *est maximal.*
Et deux points M_1 et M_2 *de* $\mathscr{C}$*, dont on donnera les coordonnées, pour lequel* $MA\times MB$ *est minimal.*
Construire les points M, M_1 *et* M_2.

EXERCICE N°4 (6points)

Dans la figure ci-après on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *la courbe* $\mathscr{C}_f$ *de la fonction* $f : x \to \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$ *ainsi que la droite* $\Delta : y=x$.



1) *Utiliser le graphique pour :*
a) *Dresser le tableau de variation de* f.
b) *Justifier que l'équation* $\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2} = x$ *admet dans* $[0,1]$ *une solution unique* α.

2) *Vérifier que* $0.8 < \alpha < 0.9$

3) *Soit* (u_n) *la suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $n\in\mathbb{N}$

a) *Montrer que pour tout* n, $\frac{4}{5} \leqslant u_n \leqslant 1$

b) *Montrer que pour tout* $x \in \left]\frac{4}{5},1\right[$ *on a :* $|f'(x)| - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\left[\frac{(x+1)^2-3}{x^2+2x+2}\right]^2$*.En déduire que* $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.

c) *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

d) *En déduire que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{4^{n+1}}$

e) *Montrer que la suite* (u_n) *converge vers* α.