

Lycée 2 Mars

Prof : Hasni Mohsen

Classe : 4^{eme} Sc 2 :

Matiere : Mathematiques

Duée : 2 h

DEVOIR DE SYNTHESSES N°1

EXERCICE 1 : (4 pts)

Dans chacune des questions suivantes une seule des trois reponses a) , b) et c) proposées est vraie . Dites la quelle .

1) Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$, on a :

a) $D_f = \mathbb{R}_+$ b) f est croissante sur \mathbb{R} c) f est majorée sur \mathbb{R}

2) Dans un plan complexe , on considere les points A (2 + i) et B (-3 + 6 i) . On a :

a) Le Triangle OAB est equilateral .

b) Le triangle OAB est isocèle.

c) Le triangle OAB est rectangle.

3) Soit α un réel , le conjugué du nombre complexe : $z = 1 + e^{i\alpha}$, est

a) $1 + e^{i\alpha}$ b) $1 - e^{i\alpha}$ c) $1 + e^{-i\alpha}$

4) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a , b]$ et qui s'annule en un réel $\alpha \in [a , b]$, on a alors :

a) $f (a) = f (b) = 0$

b) 0 est compris entre $f (a)$ et $f (b)$

c) $0 \in f ([a , b])$.

EXERCICE 2 : (4 pts)

1)Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe : $\sqrt{3} + i$.

2)Soit : $z = 1 - \sqrt{3} + i (1 + \sqrt{3})$.

a)Montrer que : $z^2 = 8 \cdot e^{i \frac{7\pi}{6}}$.

b)En deduire que : $z = 2\sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{12}}$.

3)Montrer que : z^{2010} est imaginaire pur .

EXERCICE 3 : (6 pts)

1)Verifier que : $[i (1 - e^{i\alpha})]^2 = -1 + 2 e^{i\alpha} - e^{2i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) a)Resoudre dans \mathbb{C} l'equation : $z^2 - 2 i (1 + e^{i\alpha})z - 4 e^{i\alpha} = 0$.

b)En deduire les solutions de l'equation :

$$z^4 - 2i (1 + e^{i\alpha})z^2 - 4 e^{i\alpha} = 0 .$$

3)On designe par A , B et C les points du plan complexe d'affixes respectives

$2i$, $\sqrt{3} - i$ et $2i e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0 , \pi]$.

a)Montrer que : $1 - e^{i\alpha} = -2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i \frac{\alpha}{2}}$.

b)En deduire que : $z_A - z_C = 4 \sin \frac{\alpha}{2} e^{i \frac{\alpha}{2}}$.

c)Determiner α pour que le triangle ABC soit isocèle de sommet principal A .

EXERCICE 4 : (6 pts)

Soit la fonction f definie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^3 + x + 1}{x^2 + 2} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + x - \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 1 .

2) Déterminer la limite en $-\infty$ de f .

3) a) Montrer que pour tout $x > 1$: $f(x) = 1 + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

b) En déduire la limite en $+\infty$ de f .

4) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ par :
 $g(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur I .

b) En déduire que g réalise une bijection de I sur l'intervalle $]-\infty, 1]$.

c) Montrer qu'il existe un réel α dans l'intervalle I et un seul tel que $f(\alpha) = \alpha$.

BONNE CHANCE