Lycée :Ennozha Zaghouan	*Devoir de synthèse N°1*	Epreuve :Mathématiques
Année scolaire : 2011/2012		Professeur : KHEMIRI Fawzi
Durée :2heures		Classe : 4ième Sc-exp2

Exercice1 (5points)

Les réponses aux questions de cet exercice seront données sans aucune justification.

A)Vrai ou Faux *?Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes :*

1/ $2ie^{-i\frac{\pi}{12}}$ *est une racine cubique de* $-4\sqrt{2}\,(1+i)$

2/ *Soit l'équation (E) :* $2z^2-(2+i)z+\left(\sqrt{3}+i\right)=0$ *dont les solutions sont notées* z_1 *et* z_2.

$Arg(z_1)+Arg(z_2)\equiv\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.

3/ *Les solutions de l'équation :*$(1+i)z^2-(1+2i)z+(1+i)=0$ *sont* $(1-i)$ *et* $\frac{1+i}{2}$.

B) Q.C.M *Pour chacun de énoncés suivants une seule affirmation est exacte. Attribuer la lettre qui désigne le choix au numéro de l'énoncé* .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ *par :*$f(x)=x.\sin(\frac{\pi}{x})$.

1/ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *est égale à :* **a)** $+\infty$ **b)** $-\infty$ **c)** π

2/ $\forall\, x>0; f'(x)$ *est égale à :* **a)** $\cos(\frac{\pi}{x})$ **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)-\frac{\pi}{x}\cos(\frac{\pi}{x})$ **c)** $-\frac{\pi}{x^2}\cos(\frac{\pi}{x})$.

Exercice2 (2points)

Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ *par :*$g(x)=\sqrt{x}$

1/ *Montrer que pour tout réel* $x\in[10000{,}10001]$ *;* $\frac{1}{2\sqrt{10001}}\le g'(x)\le\frac{1}{200}$

2/ *En déduire un encadrement d'amplitude* 10^{-3} *de* $\sqrt{10001}$.*(**indication :**utiliser les inégalités des accroissements finis)*

Exercice3 (6points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,0]$ *par :* $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{1-\frac{2}{x}} & si\ x<0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$.

On désigne par ($\mathscr{C}$*) sa courbe représentative dans un repère orthonormé .*

1/ a) *Montrer que f est continue à gauche en* 0.

b) *Etudier la dérivabilité de f à gauche en* 0 *et interpréter graphiquement le résultat.*

2/ a) *Montrer que pour tout réel* $x<0$, *on a :*$f'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x}}$

b) *Dresser alors le tableau de variation de f.*

3/a) *Montrer que pour tout réel* $x<0$, $f(x)-x=\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}$

b) *En déduire que la droite* $\Delta: y=x-1$ *est une asymptote à la courbe (* $\mathscr{C}$*) en* $-\infty$.

c) *Etudier la position relative de (* $\mathscr{C}$*) et* Δ.

d) *Déterminer* $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)-x+1}$

Exercice4 (7points)

Pour tout nombre complexe z, on définit : $P(z)=z^3+2(\sqrt{2}-1)z^2+4(1-\sqrt{2})z-8$

1/ a) *Calculer* $P(2)$.

b) *Déterminer le nombre complexe b tel que :* $P(z)=(z-2)(z^2+bz+4)$.

2/ *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E): P(z)=0$. *On appelle* z_1 *et* z_2 *les solutions de l'équation* (E) *autres que* 2, z_1 *ayant la partie imaginaire positive.*

a)*Vérifier que* $z_1+z_2=-2\sqrt{2}$.

b) *Donner la forme exponentielle de* z_1 *et de* z_2 .

3/ a) *Placer dans le plan, muni d'un repère orthonormé direct* $(O,\vec{u},\vec{v})$*(unité graphique : 2 cm), les points A, B et C d'affixes respectives* 2 *;* z_1 *et* z_2 *et le point I milieu de* $[AB]$.

b) *Démontrer que le triangle* OAB *est isocèle. En déduire une mesure de l'angle* $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$

c) *Donner la forme algébrique de l'affixe* z_I *de I, puis le module de* z_I

d) *Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de* $\cos\frac{3\pi}{8}$ *et* $\sin\frac{3\pi}{8}$