LYCÉE THELEPTE
2011-2012
DURÉE : 3HEURES

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

Niveau : 4 ème Science expérimentales
Epreuve : Mathématiques
Prof : Mhamdi Abderrazek

EX 1 : (3points)

Choisir **la** réponse correcte :

1) : L'équation z^6=1-i admet dans ℂ exactement :

a) six solutions **b)** sept solutions **c)** cinq solutions

2) : L'équation z^2=11-12i admet dans ℂ :

a) une racine double **b)** deux racines opposées **c)** deux racines conjuguées

3) : $\lim_{x\to+\infty} x\sin(\frac{1}{x})$ est égale à :

a) **0** **b)** $+\infty$ **c)** 1.

EX 2: (5points)

1) :a). Résoudre dans ℂ l'équation (E) :$z^2-z+1=0$

b). Mettre les solutions sous forme exponentielle

c). Résoudre dans ℂ l'équation (E') :$z^4-z^2+1=0$

2) : Résoudre dans ℂ l'équation :$z^2-2\cos(\alpha)z+1=0$ où $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

3) : on pose $f(z)=z^3-(i+2\cos(\alpha))z^2+(1+2i\cos(\alpha))z-i$ ($\forall z\in\mathbb{C}$)

a) . Montrer que $f(z)=(z-i)(z^2-2\cos(\alpha)z+1)$

b) . Résoudre dans ℂ l'équation f(z)=0

4) : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (o ; $\vec{u};\vec{v}$) on considère les points A ; M et N d'affixes respectives i ; $e^{i\alpha}$ $et\ i+e^{i\alpha}$ **a) .** Montrer que le quadrilatère OANM est un losange

b) . Déterminer les valeurs de α pour que l'aire du losange OANM soit égal à $\frac{1}{2}$

EX 3 : (5points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$

1) : Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$

2) :a). Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) . Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J

c). Expliciter f^{-1}(x) ∀ x∈J

3) :a). Montrer que $\left|f'(x)\right|-\frac{1}{4}=-\frac{[(x+1)^2-3]^2}{4(x^2+2x+2)^2}$; $\forall x \in [0;+\infty[$

b). En déduire que $\left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{4}$; $\forall x \in [0;+\infty[$

c). Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$ et que $\frac{4}{5} \leq \alpha \leq 1$

4) : Soit U la suite définie sur IN par $u_0=\frac{45}{50}$ et u_{n+1} = f(u_n) $\forall n \in IN$

a). Montrer que $\frac{4}{5} \leq u_n \leq 1$ $\forall n \in IN$

b). Montrer que $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}$ $|u_n-\alpha|$ $\forall n \in IN$

c). Montrer que $|u_n-\alpha| \leq (\frac{1}{4})^n$ $\forall n \in IN$; en déduire la limite de U.

<u>EX 4 :</u> (3points)

Soit la fonction h définie sur IR par h(x)=(x-1) (x-2) (x-3) (x-4) (x-5)

Montrer que l'équation h'(x)=0 admet dans IR exactement quatre solutions .

<u>EX 5:</u> (4points)

La courbe ci-dessus représente une fonction g deux fois dérivable sur IR

Par lecture graphique répondre aux questions suivants :

1) : a). Déterminer les équations des tangentes à la courbe de g aux points d'abscisses respectives :-1 ;0 et1

b). Résoudre dans IR les équations :g'(x)=0 et g''(x)=0

2) :a). Vérifier que l'équation g(x) = 0 admet dans IR exactement trois solution $x_0 < x_1 < x_2$ et déterminer le signe de g(x) sur IR

b). Dresser le tableau de variation de g sur IR

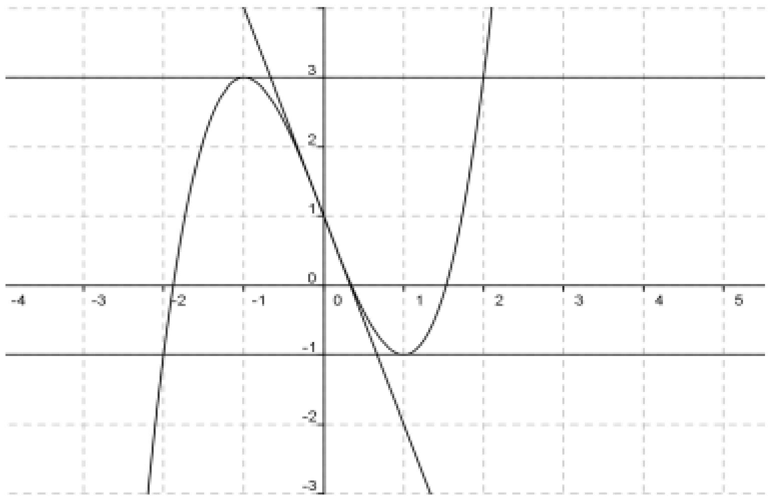
c). Calculer $\lim_{+\infty} g$; $\lim_{-\infty} g$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$

3) : Soit Ψ la restriction de g sur $[1;+\infty[$

a). Montrer que Ψ réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera

b). Etudier la dérivabilité de Ψ^{-1} sur K

c). Dresser le tableau de variation de Ψ^{-1} sur K .



BON TRAVAIl