Lycée Ali B.Bembla	**Devoir de synthèse n° 1** Mathématiques	Classe : 4 ème Sc exp3
Date : 06 /12 / 2011	Prof :Mosrati chawki	Durée : 2 heures

EXERCICE :1(5pts)

On considère les suites U et V définies sur IN par : $\begin{cases} 0 < U_0 < V_0 \\ U_n V_n = U_0 V_0 \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n) \end{cases}$

1/ a- Montrer que pour tout n de n ,on a $U_{n+1} = \dfrac{2U_n V_n}{U_n + V_n}$.

b- Montrer que pour tout entier n da IN on a $0 < U_n < V_n$.

c- Etudier les variations des suites U et V .

2/ a- Montrer que pour tout $n \in$ IN : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

b-Déduire que pour tout n de IN* , $V_n - U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)$.

c-En déduire $\lim\limits_{+\infty}(V_n - U_n)$ et que $\lim\limits_{+\infty} U_n = \lim\limits_{+\infty} V_n$. Calculer cette dernière limite.

EXERCICE :2(8pts)

Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x) = \dfrac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$

I)1) a) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

b) Déduire que f réalise une bijection de IR_+ dans un intervalle J que l'on précisera.

(On notera f^{-1} la fonction réciproque de f).

c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur]0 ;1[.

d) Montrer que $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - x + \sqrt{1-x^2}}{x}$, pour tout $x \in]0\,;1]$

2) Étudier le sens de variation de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ sur IR_+, en déduire que

L'équation : f(x) = x admet dans IR_+ une solution unique α tel que $\alpha \in]\frac{4}{5}\,; 1[$

3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \left]\frac{4}{5};1\right[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de IN .

a) Montrer que ; pour tout n de IN on a : $u_n \in \left]\frac{4}{5};1\right[$

b) Vérifier que : $\forall x \in IR_+$ on a : $|f'(x)| - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\left[\frac{(x+1)^2-3}{x^2+2x+2}\right]^2$

en déduire que $\forall x \in IR_+$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

c) Montrer que ; $\forall x \in IR_+$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$,

en déduire que, $\forall n \in IN$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

d) Montrer que, $\forall n \in IN$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_n - \alpha|$.

En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

EXERCICE :3(7pts)

1/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :$2z^2 + (7 + i\sqrt{3})z - 4(1 - i\sqrt{3}) = 0$.

a- Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera .

b- Donner alors l'autre racine de (E).

2/ a- Calculer $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E') : $2Z^4 + (7 + i\sqrt{3})Z^2 - 4(1 - i\sqrt{3}) = 0$.

3/ Le plan complexe étant muni d'un repère o.n. direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$;on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ et on désigne par I le milieu du segment [OA].

a- Écrire z_B sous forme exponentielle .

b- Placer I et B et montrer que le triangle OIB est isocèle .