|  |  |
| --- | --- |
| **Mathématiques** |  **Devoir de Synthèse n°1** |
| **Lycée Pilote Monastir** |
| $$ 4^{éme}x\_{2}$$ |  **0 7-12-2011** |  ***Durée : 2 heures***  |  ***Prof :Yacoubi hamda*** |

***Exercice N°1 :***$ \left(3 points\right)$

Donner la réponse exacte (aucune justification n’est demandée)

1) Si $u$ est une racine sixième de –i et $v$ est une racine cubique de i

Alors $\left(uv\right)$ est une racine sixième de :

 a) 1 b) i c) -i

2) Soit $f$ une fonction continue et négative sur $\left[2;+\infty \right[$ Vérifiant f(2)=0 et sa courbe admet une demi tangente verticale au point d’abscisse 2 dirigée vers le bas, alors
$$\lim\_{x\to 2^{+}}\frac{\sqrt{-f(x)}}{x-2}=$$

 a) − ∞ b) +∞ c) 0

3) Soit $f$ une fonction dérivable sur $\left]0;+\infty \right[$ alors la dérivé de la fonction F :$x⟼f\left(\frac{1}{x+1}\right) est :$

$$ a) x↦f'\left(\frac{1}{x+1}\right) b) x↦\frac{1}{\left(x+1\right)^{2}}f'\left(\frac{1}{x+1}\right) c) x↦\frac{-1}{\left(x+1\right)^{2}}f'\left(\frac{1}{x+1}\right) $$

***Exercice N°2 :***$ \left(4 points\right)$

$$Soit θ un réel de l’intervalle \left[0;π\right]∖\left\{\frac{π}{4}\right\}$$

1) Résoudre dans ℂ l’équation $z^{2}-2iz-1-2i=0$

2)a)Vérifier que $\left[e^{i\left(θ+\frac{π}{4}\right)}\right]^{2}=ie^{2iθ}$

 b) Résoudre dans ℂ l’équation $z^{2}-2iz-1-ie^{2iθ}=0$

3) Dans le plan complexe muni d’un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ on désigne par A,B,C et D les points d’affixes respectives $2i ,e^{i\left(θ+\frac{π}{4}\right)}+i , i- e^{i\left(θ+\frac{π}{4}\right)} et i$ , soit φ le cercle de centre D et de rayon 1

 a)Calculer BC en déduire que $\left[BC \right]$ est un diametre de φ

 b) Montrer que OBAC est un rectangle

**Exercice N°3 :**$\left(4 ,5points\right)$

1) Déterminer l’ensemble Ε des nombre complexes z tel que $\left|z+1\right|^{2}-\left(z+1\right)\ne 0$

$$2) Pour tout nombre complexe z de E, on pose z^{'}=\frac{2i\left|z\right|^{2}}{\left|z+1\right|^{2}-\left(z+1\right)}$$

$$Montrer que pour tout z de E on a z^{'}=\frac{2iz}{z+1}$$

3) Dans le plan complexe muni d’un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ on considère les points A (−1), M (z) et M’(z’)

Montrer que M appartient au cercle φ de centre o et de rayon 2. Si et seulement si M appartient à la médiatrice du segment $\left[OA\right]$

4) Déterminer l’ensemble $ $des points M(z) tel que z’ soit réel

**Exercice N°4 :** $\left(4 points\right)$

Soit la fonction définie sur $\left]-\infty ,-2\right]$ par $f\left(x\right)=x+3-\sqrt{x^{2}-4}$

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -2 .Interpréter graphiquement le résultat.

$$2)Déterminer\lim\_{x\to -\infty }f(x) et \lim\_{x\to -\infty }\left(f\left(x\right)-2x\right) .Interpréter graphiquement le résultat.$$

3)a)Justifier que $f$est derivable sur $\left]-\infty ;-2\right[$ et calculer $f'\left(x\right)$

 b) Dresser le tableau de variation de $f$

4) a)Montrer que l’équation $f\left(x\right)-x=0$ admet dans $\left]-\infty ;-2\right[$ une seule solution α

Vérifier que $α\in \left]-4;-3\right[$

 b) Déterminer alors le signe de$ f\left(x\right)-x$ sur $\left]-\infty ;-2\right[$

**Exercice N°5 :** $\left(4,5 points\right)$

$$Soit f la fonction définie sur R^{\*} par \left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)=\frac{\sqrt{1+x^{2}}-1}{x} si x <0 \\f\left(x\right)=\frac{x^{3}\sin(\left(\frac{π}{x}\right))}{1+x^{2}} si x>0 \end{array}\right.$$

1)a)Montrer que pour tout $x>0 on a :\left|f\left(x\right)\right|\leq x^{3}$

 b) En déduire la limite de $f$ à droite en 0

 c)Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et définir son prolongement

 2) a) Calculer la limite de $f$ en −∞

$$ b) Montrer que \lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=π$$

$$3)Soit g la fonction définie sur \left]-\infty ;1\right[ par g\left(x\right)=f\left(\sqrt{\frac{1}{1-x}}\right)$$

 a)Montrer que g est continue sur $ \left]-\infty ;1\right[$

 b) Calculer la limite de g à gauche en 1 et la limite de g en $\left(-\infty \right)$