Mathématiques		*Devoir de Synthèse n°1*	
Lycée Pilote Monastir			
$4^{\text{éme}}x_2$	0 7-12-2011	Durée : 2 heures	Prof :Yacoubi hamda

Exercice N°1 : $(3\ points)$

Donner la réponse exacte (aucune justification n'est demandée)

1) Si u est une racine sixième de –i et v est une racine cubique de i

Alors (uv) est une racine sixième de :

a) 1 b) i c) -i

2) Soit f une fonction continue et négative sur $[2;+\infty[$ Vérifiant f(2)=0 et sa courbe admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 2 dirigée vers le bas, alors

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{-f(x)}}{x-2} =$$

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0

3) Soit f une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ alors la dérivé de la fonction F :$x \longmapsto f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ est :

a) $x \mapsto f'\left(\frac{1}{x+1}\right)$ b) $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}f'\left(\frac{1}{x+1}\right)$ c) $x \mapsto \frac{-1}{(x+1)^2}f'\left(\frac{1}{x+1}\right)$

Exercice N°2 : $(4\ points)$

Soit θ un réel de l'intervalle $[0;\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2iz - 1 - 2i = 0$

2)a)Vérifier que $\left[e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right]^2 = ie^{2i\theta}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2iz - 1 - ie^{2i\theta} = 0$

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ on désigne par A,B,C et D les points d'affixes respectives 2i , $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} + i$, $i - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ et i , soit φ le cercle de centre D et de rayon 1

a)Calculer BC en déduire que [BC] est un diametre de φ

b) Montrer que OBAC est un rectangle

Exercice N°3 : (4 , 5points)

1) Déterminer l'ensemble E des nombre complexes z tel que $|z+1|^2-(z+1)\neq 0$

2) Pour tout nombre complexe z de E, on pose $z'=\dfrac{2i|z|^2}{|z+1|^2-(z+1)}$

Montrer que pour tout z de E on a $z'=\dfrac{2iz}{z+1}$

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A (-1), M (z) et M'(z')

Montrer que M appartient au cercle φ de centre o et de rayon 2. Si et seulement si M appartient à la médiatrice du segment $[OA]$

4) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' soit réel

Exercice N°4 : (4 points)

Soit la fonction définie sur $]-\infty,-2]$ par $f(x)=x+3-\sqrt{x^2-4}$

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -2 .Interpréter graphiquement le résultat.

2)Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3)a)Justifier que f est derivable sur $]-\infty;-2[$ et calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

4) a)Montrer que l'équation $f(x)-x=0$ admet dans $]-\infty;-2[$ une seule solution α

Vérifier que $\alpha\in]-4;-3[$

b) Déterminer alors le signe de $f(x)-x$ sur $]-\infty;-2[$

Exercice N°5 : (4, 5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x<0 \\ f(x)=\dfrac{x^3\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1)a)Montrer que pour tout $x>0$ on a : $|f(x)|\leq x^3$

b) En déduire la limite de f à droite en 0

c)Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et définir son prolongement

2) a) Calculer la limite de f en $-\infty$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pi$

3)Soit g la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par $g(x)=f\left(\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}\right)$

a)Montrer que g est continue sur $]-\infty;1[$

b) Calculer la limite de g à gauche en 1 et la limite de g en $(-\infty)$