Site web : http://www.matheleve.net *Email1 :contact@matheleve.net* *Email2 :matheleve@gmail.com*	**Devoir de Synthèse n°01**		
Lycée Ali Bourguiba Bembla	4 ème sc1	Mercredi 05-12-2012	Chortani Atef

Exercice 1(3 points)

Répondre par vrais ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

1) le nombre $\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\ \sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel.

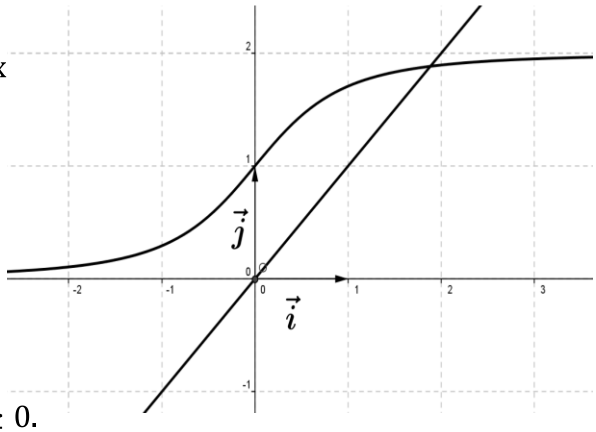
2)$1 + i\sqrt{2012}$ est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z + 2013 = 0$

3)Un argument de nombre complexe $-2e^{i\frac{\pi}{5}}$ est $-\frac{\pi}{5}$

Exercice 2 (6points)

Dans la figure ci – contre on a représenté la courbe de la fonction

$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$



1)a)Etudier le graphique pour justifier que l'équation

$1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α

b) Vérifier que $1{,}5 < \alpha < 2$

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ; n \geq 0. \end{cases}$

a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$

b) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

d)En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

e) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3(5,5points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1)a)Vérifier que pour tout $x>0$ on a : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$

b) En déduire que f est continue à droite en 0.

c) Montrer que f est dérivables à droite en 0.

d) Déterminer une équation de la demi tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

2)a)Montrer que f est dérivable sur$]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$

c)Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 4(5,5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E: z^2+2z+2=0$

2)a) Montrer que pour tout réel θ on a : $1+2i\,sin\theta\,e^{i\theta}=e^{2i\theta}$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_\theta: z^2+2z-2i\,sin\theta\,e^{i\theta}=0$

c) On suppose dans cette question que $\theta\in\,]0;\pi[$

Donner les solutions de E_θ sous forme exponentielle.

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A , B et C d'affixes respectives -2 , $z_B=e^{i\theta}-1$ et $z_C=-1-e^{i\theta}$ tel que $\theta\in\,]0;\pi[$

a) Montrer que B et C sont symétriques par rapport à un point fixe I .

b) Calculer OA et BC en déduire que OBAC est un rectangle.

c) Trouver θ pour que OBAC soit un carré.