Lycée secondaire ALI BOURGUIBA Kalâa Kbira		2012 - 2013
Épreuve : Mathématiques	Devoir de Synthèse n° 1	Durée 2 h
Prof : MAATALLAH	Le 06 - 12 - 2012	Classe : 4 Sc 1

EXERCICE N 1 (3 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.

1/ Le nombre complexe $Z = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ est une racine :

a) Huitième de l'unité b) Sixième de l'unité c) Quatrième de l'unité

2/ Pour tout réel, l'équation (E) : $iz^2 - e^{-i\alpha}z + 1 = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions z_1 et z_2 .On a donc :

a) $z_1 + z_2 = ie^{-i\alpha}$ b) $z_1.z_2 = i$ c) $z_1 + z_2 = -ie^{-i\alpha}$

3/ Soit z' et z'' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{11\pi}{6}$ on a :

a) $\frac{z''}{z'}$ est réel b) z'.z'' est réel c) z'.z'' est imaginaire pur

4/ Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}\sin(\frac{1}{\sqrt{x}})$ alors on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

a) 1 b) 0 c) $+\infty$

EXERCICE N 2 (5 points)

Soit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^3 - 2(1+i)\,z^2 + 2(1+i)z - 4$

1/ Calculer $f(2i)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

2/ Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points $A(2i)$, $B(e^{i\theta} + ie^{i\theta})$, $C(e^{i\theta} - ie^{i\theta})$ et $D(2e^{i\theta})$ avec $\theta \in [0,2\pi[$.

a) Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) Montrer que pour tout réel $\theta \in [0,2\pi[$, le triangle OBC est rectangle et isocèle en O.

c) Donner alors la nature du quadrilatère $OBDC$.

3/ On considère l'équation (E'): $\left(\frac{z+2i}{z}\right)^4 + 4 = 0$.

a) Déterminer l'ensemble $\mathfrak{F}$ des points M d'affixe z vérifiant : $|z+2i| = \sqrt{2}\,|z|$.

b) Montrer que si z est une solution de (E') alors son point image M appartient à $\mathfrak{F}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').

EXERCICE N 3 (5points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1]$ par $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x - 1$ et C_f est sa courbe dans un R.O.N$(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,-1[$ et calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

2/ a) Montrer que la droite $\Delta : y = -2x - 1$ est une asymptote à la courbe C_f.

b) Tracer la courbe C_f.

3/a) Montrer que f admet une fonction réciproque g . Tracer la courbe C_g de g dans le meme repère.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\_$ on a : $g(x) = -\frac{1}{2}(\frac{x^2+2x+2}{x+1})$

EXERCICE N 4 (7 points)

Soit f une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. On a représenté dans la page suivante et dans un repère orthogonal , les courbes de f et f'.

1) a) Justifier que $(\mathcal{H})$ est la courbe de f puis dresser son tableau de variation .

b) Justifier que f admet quatre points d'inflexion . Ecrire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'inflexion d'abscisse $x_0 \in]1,6[$.

2) a) Montrer que la restriction g de f à $]-\infty,1]$ admet une fonction réciproque.

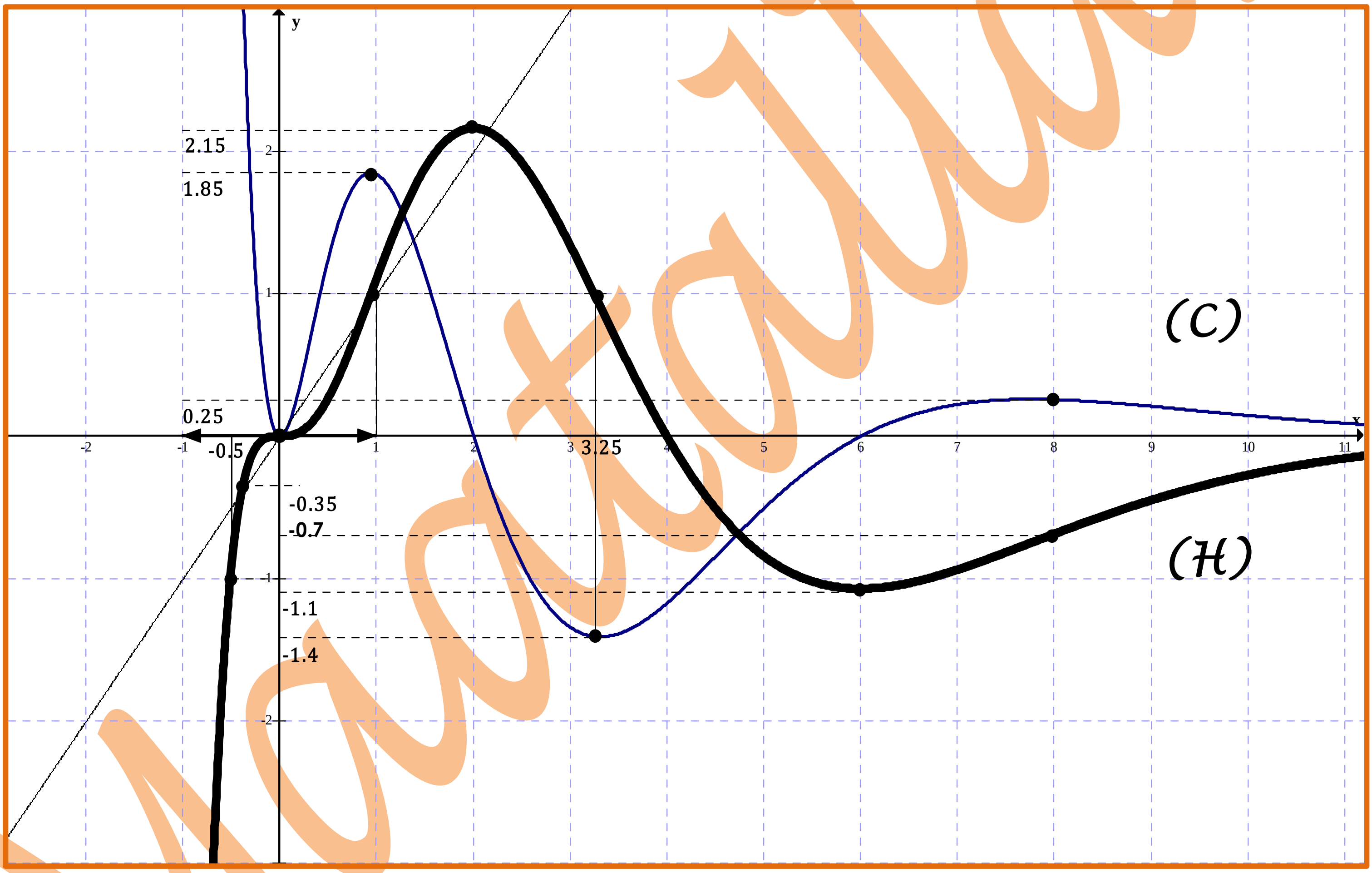
b) Déterminer graphiquement : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{g^{-1}(x)}{x}\right]$, $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{g^{-1}(x)}{x}\right]$ et $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{g^{-1}(x)-1}{x-1}\right]$.

c) Construire la courbe de g et la courbe de g^{-1} dans un repère orthonormé $\boldsymbol{R}$.

3) Soit la fonction U définie sur $]-\infty,0]$ par : $U(x)=f^2(x)+2f(x)-3$.

a) Etudier les variations de U . Montrer que : $U(x)=0$ admet dans $]-\infty,0]$ une solution unique $\alpha<-\frac{1}{2}$.

b) Montrer que : $\alpha=g^{-1}(-3)$. Résoudre , alors , sur le graphique du repère $\boldsymbol{R}$, $U(x)=0$.



Bon travail

Il sera tenu compte de la rédaction et la bonne présentation de la copie .