

Date : 10/12/2014

Devoir de synthèse N°1

Niveau : 4^{ème} sc.exp

Nombre de pages : 2

Durée : 2h

MATHEMATIQUESN.B : L'utilisation de la calculatrice personnelle est autorisée, cependant son échange est strictement interdit.**EXERCICE N° 1 (3 pts)**

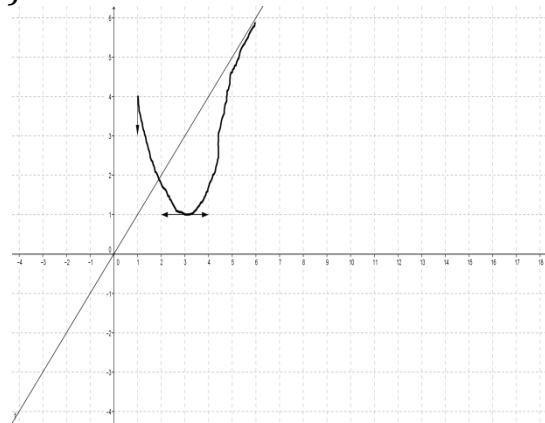
Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux en justifiant la réponse :

- 1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
 - a) Si A et B sont les points dont les affixes sont les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $250z^2 - 1000iz + 1014 - 11015i = 0$, alors le milieu de $[AB]$ est $K(0 ; 2)$.
 - b) L'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z| = |\bar{z} - 2i|$ est la droite $y=2$.
- 2) Si f est une fonction dérivable sur \mathbb{R}^* et $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, alors

$$g'(x) = -\frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

- 3) On donne ci-contre la courbe ζ d'une fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{x - 3} = \frac{1}{3}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = +\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - x} = +\infty$

**EXERCICE N° 2 (6 pts)**1) a) Calculer $(1+3i)^2$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (3+i)z + 4 = 0$.

2) On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$.

- a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle qu'on déterminera.
- b) Résoudre alors (E).

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_1 = 2+2i$ et $z_2 = 1-i$.

- a) Ecrire sous forme exponentielle z_1 et z_2 .



- b) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$
- c) En déduire que le triangle OAB est rectangle en O.
- 4)a) Mettre sous forme trigonométrique et algébrique le nombre $e^{2i\frac{\pi}{3}} \cdot z_1$
- b) En déduire que $\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE N° 3 (5 pts)

Soit θ un réel dans $]0 ; \pi[$. On considère dans \mathbb{C} l'équation

$$(E): (1-i)z^2 - 2(1+e^{i\theta})z + (1+i)(1+e^{i\theta})^2 = 0.$$

- 1) a) Résoudre l'équation (E).
 b) Ecrire les deux solutions sous forme exponentielle.
- 2) Soient M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_2 = i(1 + e^{i\theta})$.
 Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit $]0 ; \pi[$.
- 3)a) Montrer que le triangle OM_1M_2 est isocèle rectangle en O.
 b) Soit B le point d'affixe $2i$, déterminer le réel pour que OM_1BM_2 soit un carré.

EXERCICE N° 4 (6 pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et ζ sa courbe dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

- 1)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.
 b) Vérifier que $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ et dresser le tableau des variations de f .
 c) Déterminer $f(\mathbb{R})$.
- 2) Montrer que le point $I(0 ; 1)$ est un point de ζ et qu'il est un centre de symétrie de ζ .
- 3)a) Montrer que la fonction définie par $g(x) = f(x) + x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .
 b) En déduire que l'équation $f(x) = -x$ admet dans \mathbb{R} une solution unique α , puis que $-1 < \alpha < 0$.
 c) Vérifier que $\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha+1}$.
- 4) Montrer que les droites $\Delta : y = x$ et $\Delta' : y = x+2$ sont deux asymptotes obliques à la courbe ζ' de la fonction g .