L- Mateur | Devoir de synthèse n°1 | Prof :Talbi Rachid

Classe : 4SC1 | Durée : 2H | Le 17 /12 /2014

EXERCICE 1 (3pts)

Répondre par vrai au faux.

1) Les racines cubiques de - 1 sont -1 ; $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

2) La courbe C_f dans un repère du plan de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x^5 + x^4 - 2x + 1$ possède deux points d'inflexions.

3) Les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN^* par : $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{-1}{n+1}$ sont adjacentes.

EXERCICE 2 (5pts)

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{8+2u_n^2} \end{cases}$

1) a) Calculer u_1

b) Montrer que $\forall\, n \in IN : 0 < u_n < 2$

2) a) Montrer que (u_n) est une suite croissante.

b) En déduire que (u_n) est une suite convergente.

c) Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) a) Montrer que $\forall\, n \in IN :\ 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(2 - u_n)$

b) En déduire que $\forall\, n \in IN :\ |u_n - 2| \leq (\frac{2}{3})^n$

c) Retrouver alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 3 (6pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

1) a) Montrer que $D_f = [0\,,1[$

b) Calculer $\lim_{x\to1^-} f(x)$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b) Interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$, $\forall\, x \in\ ]0\,,1[$

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,1[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer $f^{-1}(0)$

5) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J^*.

b) Calculer $(f^{-1})'(1)$.

c) Déterminer $(f^{-1})(x), \forall x \in J$.

6) Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

<u>EXERCICE 4</u> (6pts)

1) a) Vérifier que $(2e^{i\frac{\pi}{3}})^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$

b) Résoudre dans ¢ l'équation (E) : $\boldsymbol{z^2 - 2z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0}$

c) Déterminer dans ¢ les solutions de l'équation (F) : $\boldsymbol{z^2 - 2z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0}$

2) soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère dans ¢ l'équation (E_θ) : $\boldsymbol{z^2 - 2z - 2i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0}$

On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_θ).

a) Montrer que $arg(z_1) + arg(z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Résoudre dans ¢ l'équation (E_θ).

3) $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan complexe. On désigne par A, M et N les points d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_M = 1 - e^{i\theta}$ et $z_N = 1 + e^{i\theta}$

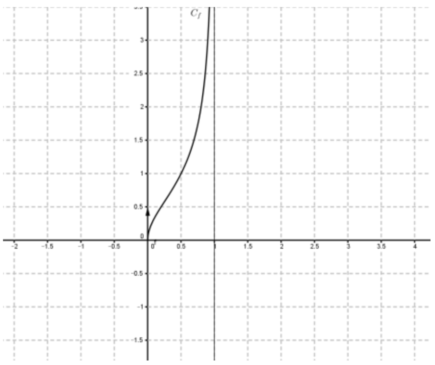
a) Montrer que $z_N = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$, $\forall \theta \in]0, \pi[$

b) En déduire une écriture exponentielle des nombres complexes z_M et z_N.

4) a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$.

b) Montrer que le quadrilatère OMAN est un rectangle.

BON TRAVAIL


C_f
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4