

**Exercice n°1 : (3 points)**

Choisir la lettre qui correspond à l'unique bonne réponse et sans justification

Soit la fonctions f définie sur  $] -1, 1[$  par  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  et la fonction g définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  par  $g(x) = \sin x$

- 1) a)  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$       b)  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$       c)  $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$
- 2) la fonction  $f \circ g$  est dérivable sur :      a)  $] -1, 1[$       b)  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$       c)  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- 3) a)  $(f \circ g)'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$       b)  $(f \circ g)'(x) = \sin x$       c)  $(f \circ g)'(x) = -\sin x$

**Exercice n°2 : (4 points)**

L'espace est munie d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points A(1,1,2), B(1,-1,-2), C(2,-1,3) et D(2,2,2).

- 1) a) Calculer les composantes du vecteur  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  puis déduire que A, B et C ne sont pas alignés.  
b) Calculer  $d(C, (AB))$  la distance du point C à la droite (AB).  
c) Vérifier que  $AC = d(C, (AB))$  puis déduire la nature du triangle ABC.  
d) Déterminer l'aire du triangle ABC.
- 2) a) Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.  
b) Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.
- 3) Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). calculer DH.

**Exercice n°3 : (7 points)**

Soit la fonction f définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = 3 - \sqrt{x}$

- 1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 et interpréter graphiquement le résultat.  
b) Dresser le tableau de variation de f.
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  dans un intervalle J que l'on déterminera.  
b) Graphiquement, justifier que  $f^{-1}$  est dérivable à gauche de 3.  
c) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $] -\infty, 3[$  puis dresser son tableau de variation.  
d) Calculer  $(f^{-1})'(1)$   
e) Expliciter  $f^{-1}(x)$ .
- 3) On donne dans l'annexe la courbe représentative de la fonction f. construire dans le même repère la courbe de  $f^{-1}$ .

4) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $[1, 2]$  une unique solution  $\alpha$ .

5) Soit la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$ .

a) Montrer que pour tout  $n$  on a :  $1 \leq U_n \leq 4$ .

b) Montrer que tout  $x \in [1, +\infty[$  on a :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) Montrer que pour tout  $n$  on a :  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$  puis déduire que :  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \alpha|$

d) Déduire la limite de  $(U_n)$

#### **Exercice n°4 : ( 6 points)**

1) Ecrire les nombres complexes  $\alpha = 1 + i$  et  $b = -\sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$  sous forme exponentielles.

2) Soit l'équation (E) :  $2z^2 - \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})z + (-1 + i\sqrt{3}) = 0$

a) Calculer le discriminant  $\Delta$  de l'équation (E).

b) Vérifier que :  $4 - 4i\sqrt{3} = \left(2(1 - i)e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2$  et que  $b = -2(1 + i)e^{i\frac{\pi}{12}}$

c) Déterminer les solutions de (E).

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs  $z_A = e^{i\frac{\pi}{12}}$ ,  $z_B = ie^{i\frac{\pi}{12}}$ ,  $z_C = 1 + i$  et

$$z_D = z_A + z_B$$

a) Ecrire  $z_D$  sous forme exponentielle puis placer dans le repère les points C et D.

b) Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle en O.

c) Déduire que OADB est un carré.

d) Vérifier que A et B appartiennent au même cercle de centre O dont on précisera son rayon.

e) Construire dans le même repère les points A et B en expliquant votre méthode.

**Bon travail**

Annexe de l'exercice n°3

Nom et prénom :.....

