



Exercice N :1(03pts)

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

- 1) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 2) Calculer $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(\sqrt{2})$.
- 3) Tracer la courbe (C) de f et (C') de f^{-1} dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 4) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

b) Montrer que pour tout $x > 1$ on a: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

c) Calculer alors ; $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - \sqrt{2}}$.

Exercice N :2 (05 pts)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (1 + i)z + i = 0$
- 2) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ on considère l'équation (E): $z^2 - 2e^{i\theta} \cos\theta z + e^{2i\theta} = 0$
 - a) Vérifier que 1 est une solution de (E) .
 - b) En déduire l'autre solution de E .
- 3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B et C d'affixes respectives : 1, $e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$.
 - a) Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$
 - b) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.
 - c) Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire de losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice N :3 (06pts)

Dans la figure ci – contre on a représenté la courbe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ ainsi que la droite } \Delta \text{ d'équation } y = x$$

1) a) **Par une lecture graphique** , justifier que l'équation

$$1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x \text{ admet dans } \mathbb{R} \text{ une unique solution } \alpha .$$

b) Vérifier que $1,5 < \alpha < 2$

c) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

d) Dresser le tableau de variation de f .

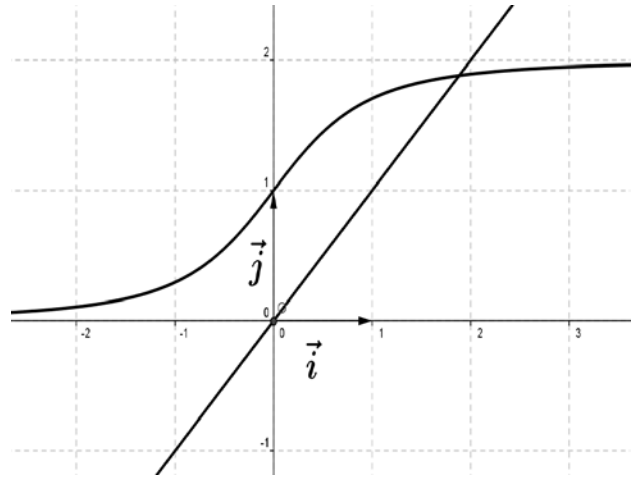
2) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \geq 0. \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$

c) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.



Exercice N :4 (06pts)

On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + \cos(U_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que la fonction $f: x \mapsto x + \cos(x)$ est croissante sur \mathbb{R} .

2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n) .

c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que $\sum_{k=0}^n \cos(U_k) = U_{n+1}$.

b) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \cos(U_k)$.

4) Soit x un réel donné. Développer $(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})^2$; puis déduire que $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos(x)+1}{2}$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{U_k}{2}\right)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_{n+1}}{2(n+1)}$.

b) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nV_n$.

