Devoir de Synthése n°1 Mathématiques	L.C.K – L.S.K
	Date : 08 / 12 /2015
	Durée : 2 Heures
Séction : 4ème Sciences expérimentales	Prof : B.Tmim – B.Allala

Exercice n°1 :(4Pts)

On donne dans l'annexe ci-jointe , la courbe représentative d'une donction f qui est définie sur $[-1,+\infty[$.(**Fig1**)

En utilisant la courbe (C_f) de f :

1) Justifier que f est une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2)a) Déterminer $f'(3)$, $f''(3)$, $f^{-1}([-1.1[)$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{f(x)+1}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^{-1}(x)-3}{x-1}$.

b) Déterminer $(f^{-1})'(1)$.

3) Tracer la courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} dans le même repère .

4) Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in]0,1[$ vérifiant : $(f^{-1})'(\alpha) = 3$.

Exercice n°2 :(5.5 Pts)

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ et ξ_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b/ Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x^2-1})}$.

c/ Dresser le tableau de variation de f

2) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = f\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$ et $g(0) = 1$

a/ Montrer que g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b/ Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $g'(x) = \dfrac{-1}{1+\sin x}$

c/ Montrer que pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $-1 \leq g'(x) \leq -\frac{1}{2}$

d/ Montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $1 - x \leq g(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x$

Exercice N°3 :(5Pts)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 3u_n + 6}{u_n - 1}$.

1) Montrer par récurrence qur pour tout $n \geq 0$, on a : $3 \leq u_n \leq 4$.

(**Indication** : la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$ est croissante sur l'intervalle [3 ; 4])

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite .

3) a) Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a : $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a : $0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4) On admet que pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Soit $v_n = n(u_n - 3)$.

a) Montrer aue pour tout $n \geq 4$, $v_n \leq \frac{1}{n}$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

<u>Exercice n°4 :(5.5 Pts)</u>

1) a) Vérifier que $3 + i\sqrt{3}$ est une racine carrée de $6 + 6i\sqrt{3}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1 - i\sqrt{3})z - 2(1 + i\sqrt{3}) = 0$

c) Donner les solutions sous forme exponentielle.

d) En déduire les solutions de l'équaion (E') : $Z^4 - (1 - i\sqrt{3})Z^2 - 2(1 + i\sqrt{3}) = 0$.

2) On désigne par A , B et B' les points d'affixes respectives : 2 , $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{b}$.

Sur l'annexe **(Fig 2)** , on a placé sur le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2 le point M d'affixe $z = 2e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$.

a) Construire les points A , B , B' et le point M' d'affixe $z' = 2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$.

b) Montrer que : $z' = \frac{b}{2} z$.

3) On désigne par K et K' les milieux respectifs de $[BM]$ et $[B'M']$.

a) Vérifier que : $z_{K'} = \frac{2\bar{b} + bz}{4}$.

b) Montrer que : $b^2 - 4b = 2\bar{b} - 8$ et que $z_{K'} - 2 = \frac{b}{2}(z_K - 2)$.

c) En déduire que lorsque M varie sur le cercle $(\mathcal{C})$, la médiatrice de $[KK']$ passe par un point fixe que l'on précisera .

Feuille a rendre

Figure 1 : (Exercice n°1)

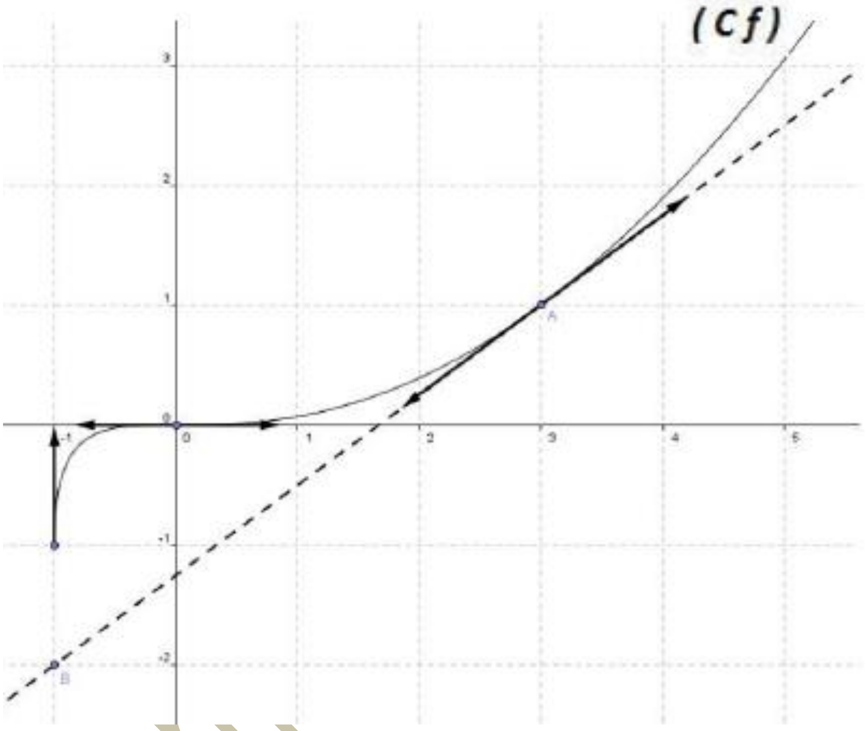

Figure 2 : (Exercice n°4)