REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
LYCEE haffouz

Devoir de synthése N° 1

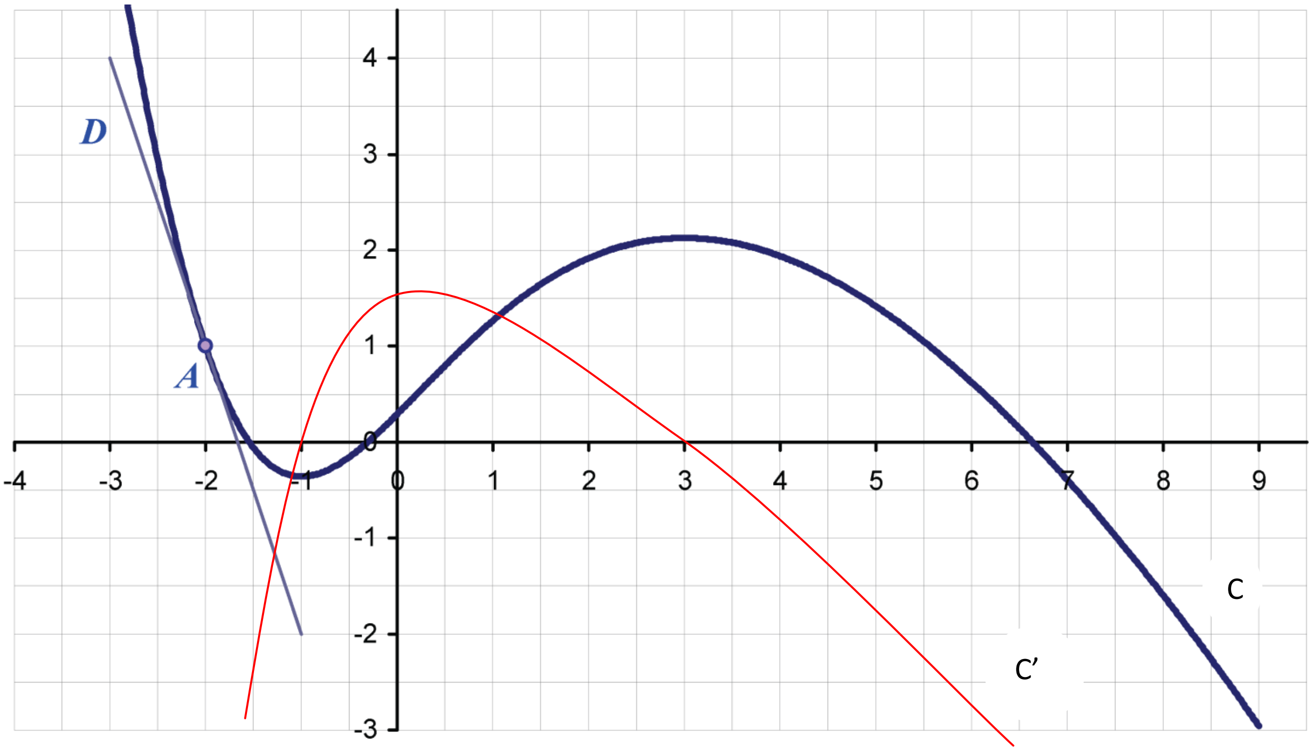
10 Décembre 2015

EPREUVE : Mathématique — NIVEAU : $4^{ème}$ SC 2

PROFESSEUR: Mr. MAJDI SAOUDI — DURÉE: 2H

EXERCICE N°: 1 (4 points)

A chacune des questions suivantes 2 , 3 et 4, trois affirmations sont données.
Une seule affirmation est exacte.
Donner avec justification le numéro de la question et la lettre qui lui correspond dans le tableau dans l'annexe.



Sur la figure ci-dessus est tracée deux courbes représentatives notées C et C' d'une fonction f dérivable sur IR et sa fonction f '

On sait que :

la droite D est tangente à la courbe C au point A (-2;1)

la courbe C admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points d'abscisse -1 et 3

1) Justifier que la courbe C est celui de f et la courbe C' est de f '

2) On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f alors :

a• $f'(-2) = 1$ b• $f'(-2) = -3$ c• $f'(-2) = 0$

3) L'équation $f'(x) = 0$ admet :

a• deux solution b• trois solutions c• quatre solutions

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x^2)$. Alors :

a• $g'(\sqrt{2}) = -3$ b• $g'(\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$ c• $g'(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$

EXERCICE N°: 2 *(4 points)*

Soit la suite U définie sur IN par : $U_0 = 0$ *et* $U_{n+1} = \dfrac{2}{2\sqrt{2} - U_n}$

1) a/ *Montrer par récurrence que pour tout n de IN* $U_n \langle \sqrt{2}$

   b/ *Montrer que la suite est croissante .*

   c/ *En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite .*

2) *On pose pour tout n de IN* $V_n = \dfrac{U_n}{\sqrt{2} - U_n}$.

   a/ *Montrer que pour tout n de IN* $V_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - U_n}$

   b/ *En déduire que la suite (* V_n *) est une suite arithmétique de raison 1.*

   c/ *Exprimer* V_n *en fonction de n et montrer que* $U_n = \dfrac{\sqrt{2}\, n}{n+1}$

   d/ *Retrouver la limite de U.*

3) *Soit* $W_n = \sqrt{\dfrac{1+2n}{n}}$

   Montrer que W et U sont adjassentes

EXERCICE N°: 3 *(6points)*

Soit f *la fonction définie sur* $[1, +\infty[$ *par :* $f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 - 1}$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan P muni d'un repère orthonormé R $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *et interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

2) **a-** *Etudier la dérivabilité de* f *à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

b- *Montrer que* f *est dérivable sur* $]1, +\infty[$ *et calculer* $f'(x)$.

c- *Dresser le tableau de variation de* f

3) *Soit g la restriction de f sur* $[1, +\infty[$

a- *Montrer que g réalise une bijection de* $[1, +\infty[$ *sur* $[0, 1[$.

b-*Etudier la dérivabilité de* g^{-1} *à droite en 0 .*

c- *Etudier la dérivabilité de* g^{-1} *sur* $]0,1[$.

d- *Calculer* $g^{-1}{}'(2\sqrt{2}-2)$ *écrire l'équation de la tangente a* C_g^{-1} *au point d'abscisse* $2\sqrt{2}-2$.

4) *Tracer la courbe de* g^{-1} *sur le même repère avec la courbe de g dans l'annexe*

5) *Soit la fonction h définie sur* $]0,1]$ *par:* $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que h est dérivable sur $]0,1[$ *et calculer* $h'(x)$.

EXERCICE N°: 4 **(6 points)**

1) *Soit dans l'ensemble des nombres complexes C l'équation (E) :*
$2z^2-(1+i(\sqrt{3}-2))z+\sqrt{3}-i=0$
 a/ Vérifier que (-i) est une solution de (E) .
 b/ Déduire l'autre solution.
 c/ Donner la forme exponentielle de chacune des solution de (E) .
2) *Soit (E') :* $2z^3-(3+i(\sqrt{3}-2))z^2+(1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-3)i)z-\sqrt{3}+i=0$
 a/ Montrer que E' admet une solution réelle z_0 *qui l'on déterminera.*
 b/ Montrer que E' admet une solution imaginaire pure z_1 *qui l'on déterminera.*
 c/ Montrer que :
$2z^3-(3+i(\sqrt{3}-2))z^2+(1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-3)i)z-\sqrt{3}+i=(z-1)\left(2z^2-(1+i(\sqrt{3}-2))z+\sqrt{3}-i\right)$
 d/ Déduire alors l'autre solution.
3) *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé* $(O\ \vec{u}\ \ \vec{v})$ *on donne les points A, B, E et F d'affixes respectives* $a=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i)$ *, 1 et –i*
 a/ Placer dans le repère les points E , F et A
 b/ Vérifier que b-a=i(a+i)
 c/ En déduire que le triangle ABF est rectangle et isocèle en A.
4) *Construire le point B dans le repère* $(O\ \vec{u}\ \ \vec{v})$.

à rendre avec la copie

Nom & prénom : …………………………………………… 4 SC 2

EXERCICE :N°1

Question	Réponse	Justification
2		…………………………………………… ……………………………………………
3		…………………………………………… ……………………………………………
4		…………………………………………… ……………………………………………

EXERCICE :N°3