EXERCICE 1($4pts$)
Une seule réponse proposée est correcte, aucune justification n'est démandée.

1. z et z' deux nombres complexes non nuls. $|z| = |z'|$ équivaut à

   a) $z = z'$ b) $z = z'$ ou $z = -z'$ c) $\dfrac{z}{z'} = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

2. Soit $z = 1 + e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ alors la forme exponentielle de z est:

   a) $2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$ b) $-2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$ c) $2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$

3. Soit $z = 2i\left(\sin\dfrac{\pi}{12} + i\cos\dfrac{\pi}{12}\right)$ on a :

   a) $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ b) $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ c) $\arg z \equiv \dfrac{11\pi}{12}\ [2\pi]$

4. On pose $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{2n}$,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.On a:

   a) (u_n) est divergente   b) (u_n) est croissante   c) (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes

EXERCICE 2($4pts$)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{8 + 2u_n^2} \quad, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. (a) Calculer u_1
   (b) Montrer que $0 < u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $(2 - u_{n+1}) \leq \dfrac{2}{3}(2 - u_n)$
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$: $|u_n - 2| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
   (c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 3($6pts$)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$

1. (a) Déterminer D_f
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2. (a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en -1.
   (b) Intérpreter géometriquement les résultas obtenus
3. (a) Montrer que la droite $D : y = 2x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

(b) Montrer que $\begin{cases} f'(x) < 0 \ , \forall \ x < -1 \\ f'(x) > 0 \quad , \forall \ x > 1 \end{cases}$

(c) Dresser le tableau de variations de f.

4. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[1, +\infty[$

   (a) Montrer que g est une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   (b) Calculer $g^{-1}(2)$ et $\left(g^{-1}\right)'(2)$.

   (c) Etudier la dérivabilité de g^{-1} et tacer $(C_{g^{-1}})$.

5. Soit h la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = g\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

   (a) Montrer que $h(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$, $\forall \ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

   (b) Montrer que h est une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$sur un intervalle Kque l'on précisera.

   (c) Montrer que h^{-1}est dérivable sur K et $\left(h^{-1}\right)'(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$

EXERCICE 4(6pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. (a) Vérifier que $z_0 = \sqrt{2}e^{i\dfrac{\pi}{6}}$ est une racine quatérième de $-2 + 2i\sqrt{3}$.

   (b) Ecrire alors sous forme algébrique les racines quatérième de $-2 + 2i\sqrt{3}$.

2. Soit $f(z) = z^2 - (-1 + 2i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3}$, $\forall \in \mathbb{C}$

   (a) Calculer $f(1)$

   (b) En déduire les solutions de l'équation $f(z) = 0$.

   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^8 - (-1 + 2i\sqrt{3})z^4 - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

3. Soient les points $A(1)$, $B(-2 + 2i\sqrt{3})$ et $C(c)$ avec c le nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$ et dont la partie réelle est $\dfrac{5}{2}$.

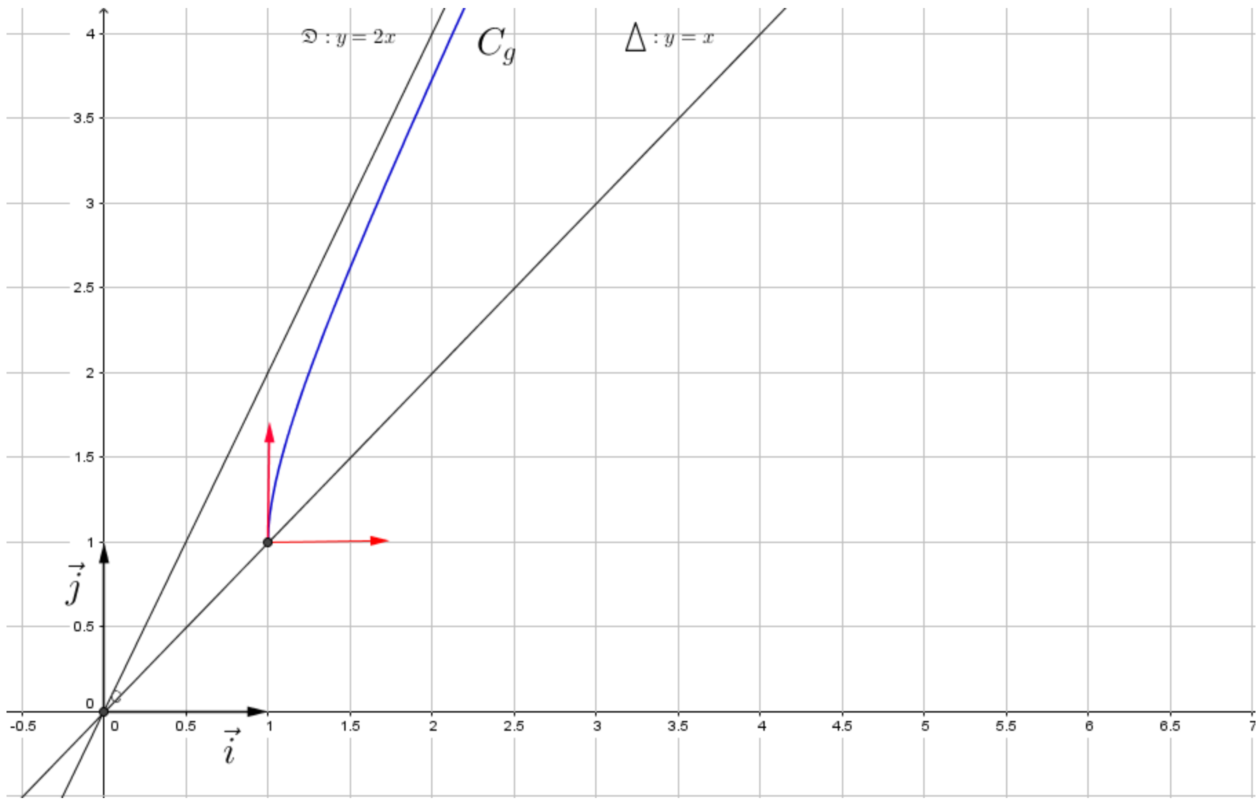
   (a) Placer les points A, B et C (laisser les traces de constructions apparentes).

   (b) Déterminer $|c|$ puis écrire c sous forme algébrique.

4. (a) Déterminer $\dfrac{AB}{AC}$ et donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

   (b) En déduire la nature du triangle ABC.

Annexe à rende avec la copie



BON TRAVAIL