LS EL Alia | **AS : 2015/2016**

Devoir de synthèse n°1

Prof: Tlich Ahmed | **(Bac Science1 et 2)** | **Durée: 2h**

Exercice n°1 : (3 points)

Choisir l'unique bonne réponse et sans justification

1) Soit f une fonction bijective contenant 0 et $f(0)=1$ alors l'équation $f^{-1}(x)=0$ admet :

a) une unique solution . b) aucune solution

2) Soit une fonction dérivable sur IR et tel que $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ alors

a) $\left(f(tgx)\right)'=1$ b) $\left(f(tgx)\right)'=\dfrac{1}{1+tg^2x}$ c) $\left(f(tgx)\right)'=\dfrac{tgx}{1+x^2}$

3) La fonction définie sur IR par $f(x)=x^3-3x^2+5$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse : a) 0 b) 1 c) 2

Exercice n°2 : (5,5 points)

Soit dans □ l équation (E$_1$) : $Z^2-2i\sqrt{3}Z-4=0$

1) Résoudre l'équation (E$_1$).

2) Soit dans □ l équation (E$_2$) : $Z^3-(1+2i\sqrt{3})Z^2-(4-2i\sqrt{3})Z+4=0$

a) Vérifier que 1 est une solution de (E$_2$).

b) Résoudre dans □ l'équation (E$_2$).

3) Le plan complexe est muni d un repère orthonormée $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B , C et K d affixes respectives :

$Z_A=1+i\sqrt{3}$, $Z_B=2i\sqrt{3}$, $Z_C=-1+i\sqrt{3}$ et $Z_K=i\sqrt{3}$.

a) Dans l'annexe n°2 on placer le point K. Construire les points A, B et C.

b) Montrer que OABC est un losange.

4)a) Ecrire Z_A et Z_C sous forme exponentielle.

b) Vérifier que Z_A est une racine cubique de (-8) et Z_C est une racine cubique de 8.

c) Montrer que Z_0 est une racine cubique de 8 si et seulement si ($-Z_0$) est une racine cubique de (-8)

d) On remarque que 2 est une racine cubique de 8 , déduire de ce qui précède et sans calculs les autres racines cubiques de 8 .

Exercice n°3 : (5 points)

L'espace est munie d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A (-2, 0,1), B (1, 2,1), C (1, 1,0) et D (1, 3,0).

1) Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis déduire que A, B et C ne sont pas alignés.

2) a) Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

3) Soit H le projeté orthogonal de D sur (ABC). Calculer DH.

4) Soit E le projeté orthogonale de D sur la droite (AB).

a) Calculer d (D,(AB)) la distance du point D à la droite (AB).

b) Vérifier que le triangle DHE est rectangle en H puis déduire HE.

Exercice n°4 : **(6,5 points)**

1) Soit la fonction définie sur [0,+∞ [par f(x) = $1+\sqrt{x^2+1}-x$ et on note (C_f) sa courbe représentée dans l'annexe ci-joint.

a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

b) Monter que $f'(x)=\dfrac{-1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Monter que f est bijective de [0,+∞ [sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Expliciter f^{-1}(x) .

c) Construire dans l'annexe n°1 ci -joint la courbe de la fonction f^{-1}.

3) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans [0,+∞ [une unique solution α puis vérifier que $\alpha\in]1,2[$

4) Vérifier pour tout $x\in[1,+\infty[$ on a : $\left|f'(x)\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ puis déduire que $\left|f'(\text{x})\right|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5) Soit la suite définie sur IN par U_0 =1 et U_{n+1} = f (U_n).

a) Montrer que pour tout n Є IN : $U_n\ge1$

b) Montrer que pour tout n Є IN : $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|U_n-\alpha\right|$

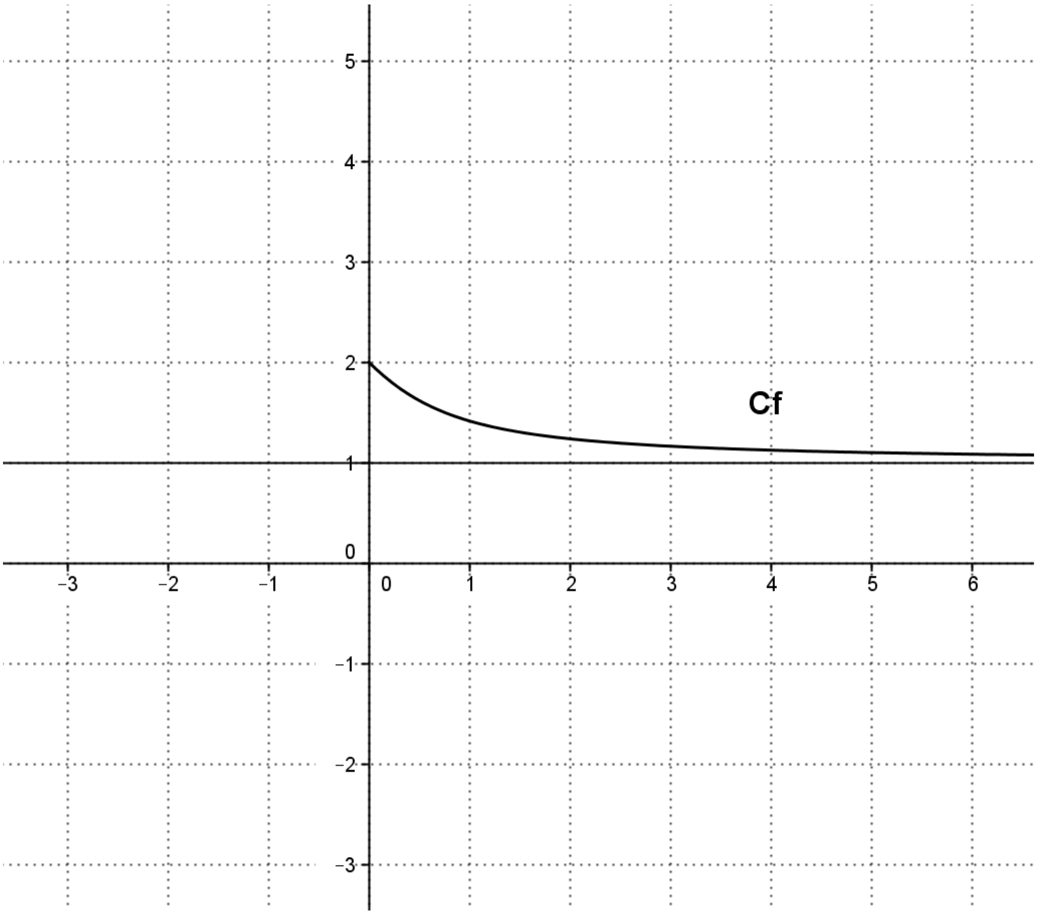
c) Déduire par récurrence que pour tout n Є IN : $\left|U_n-\alpha\right|\le\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left|1-\alpha\right|$

d) Calculer la limite de la suite (U_n)

Bon travail

Nom et prénom :..

Annexe n°1(Exercice n°4)



Annexe n°2(Exercice n°2)