


<b>Mathématiques</b>	 <b>Devoir de Synthèse N°1</b>	
<b>Lycée Takelsa</b>		
<b>Classe : 4<sup>ème</sup> Sc.Exp 1</b> <b>Date : le 15/12/2015</b>	<b>Durée : 2 h</b>	<b>Prof : Ziadi Mourad</b>

### Exercice N :1 (06pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$  .

1)a) Soit  $x > 0$  ; montrer que pour tout  $t \in [x, x + 1]$  on a :  $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) En déduire que pour tout réel  $x > 0$  on a :  $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  .

Montrer que la suite  $(U_n)$  est convergente vers un réel  $L$  que l'on déterminera.

3) Soit  $(V_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $V_n \geq \sqrt{n}$  .

b) La suite  $(V_n)$  est-elle convergente ?

4) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq U_{n-1}$

b) En déduire que la suite de terme général  $\frac{V_n}{\sqrt{n}}$  est convergente vers 2 .

### Exercice N :2 (06pts)

1) Soit dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - (\sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 0$  .

a) Vérifier que 2 est une solution de (E) .

b) Déduire l'autre solution de (E) .

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  , on considère les points A et B d'affixes respectives  $z_A = 2$  et  $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  .

a) Mettre  $z_B$  sous forme exponentielle.

b) Placer le point B dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  .

3) Soit le point C d'affixe  $z_C = 2 + z_B$

a) Placer le point C dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  .

b) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

c) Vérifier que  $1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = (e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}})e^{i\frac{\pi}{8}}$

d) En déduire que  $z_C = 4\cos(\frac{\pi}{8})e^{i\frac{\pi}{8}}$  .

e) Montrer que  $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$  .

### Problème : (08pts)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  .

On désigne par  $Cf$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

I) 1)a) Montrer que pour tout  $x$  appartient à  $[0, +\infty[$  on a :  $f'(x) = \frac{-x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$

b) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $]1, 2]$  .

2) a) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0, +\infty[$  .

b) Vérifier que  $\frac{3}{2} < \alpha < 2$  .

3)a) Tracer  $Cf$  et  $Cf^{-1}$  dans le même repère.

b) Montrer que pour tout  $x \in ]1, 2]$  on a :  $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

4) Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$  .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que pour tout  $x \in [1, 2]$  on a :  $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - \alpha|$

d) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

e) Montrer, alors que la suite  $(U_n)$  est convergente et calculer sa limite.

II) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par :  $g(x) = \begin{cases} f(\tan(x)) & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

1) a) Montrer que  $g$  est continue à gauche en  $\frac{\pi}{2}$

b) Montrer que pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  on a :  $g(x) = 1 + \cos(x)$  .

2) a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $[1, 2]$ .

b) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $[1, 2[$  et que pour tout  $x \in [1, 2[$  on a :

$$(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2x-x^2}} .$$

**BON TRAVAIL**

