

<u>Devoir de Synthèse N°1</u> <u>Mathématiques</u>	L.C.K – L.S.K
	Date : 27 / 12 / 2016
	Durée : 2 Heures
Séction : 4^{ème} Sciences expérimentales	Prof s: B.A et B.T

Exercice N° 1:(3pts)

La courbe (C_f) représentée sur l'annexe ci-jointe (**Fig 1**) est celle d'une fonction f dérivable et décroissante sur $]0, +\infty[$. (C_f) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. La tangente à la courbe (C_f) au point $B(2, \frac{3}{2})$ passe par le point $D(4,0)$.

Par lectures graphiques :

- 1) a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - b) Déterminer $f'(1)$, $f'(2)$ et $f''(2)$.
 - c) Vérifier que f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$ et déterminer $(f^{-1})'(\frac{3}{2})$.
- 2) a) Soit g la restriction de f sur $[1, +\infty[$, montrer que g est une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b) Tracer la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère (o, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice n°2 :(5,5pts)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

- 1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-1}{2(\sqrt{x})^3}$.
 - b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]1, 2[$.
 - c) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- 2) Soit La suite U définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout n de \mathbb{N} , $U_{n+1} = f(U_n)$.
 - a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $1 \leq U_n \leq 2$
 - b) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$.
 - c) En déduire que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$
 - d) Calculer la limite de la suite (U_n) .

Exercice N°3 : (5,5pts)

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_0 = 3 ; V_0 = 4 ; U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \text{ pour tout entier naturel } n .$$

1) Soit la suite (W_n) définie par : $W_n = V_n - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

b) Exprimer W_n en fonction de n .

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2 \times 4^n}$ et $V_{n+1} = V_n - \frac{1}{4^{n+1}}$.

b) En déduire les variations de (U_n) et (V_n) .

c) Démontrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes. Que peut-on déduire ?

3) On considère à présent la suite $t_n = \frac{U_n + 2V_n}{3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite (t_n) est constante.

b) En déduire la limite des suites (U_n) et (V_n) .

Exercice n°4 : (6pts)

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) .

1) a) Calculer $(1 - i)^2$

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(E) : z^2 - (3 + i)z + 2(1 + i) = 0$.

2) Soit l'équation : $(E_\theta) : z^2 - (3 + i)e^{i\theta}z + 2(1 + i)e^{2i\theta} = 0$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

a) Montrer que z est une solution de (E_θ) si et seulement si $(e^{-i\theta}z)$ est une solution de (E) .

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) .

3) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2e^{i\theta}$; $b = (1 + i)e^{i\theta}$ et $c = ie^{i\theta}$.

a) Donner la forme exponentielle de b et c .

b) Montrer que : $(OA) \perp (OC)$.

c) Construire dans repère (o, \vec{u}, \vec{v}) les points A, B et C pour $\theta = \frac{\pi}{4}$. (Fig 2)

4) a) Montrer que $OABC$ est un trapèze pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Vérifier que l'aire de trapèze $OABC$ est constante pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Bon travail

Feuille à rendre

Nom et prénom :

Figure 1 : (Exercice n°1)

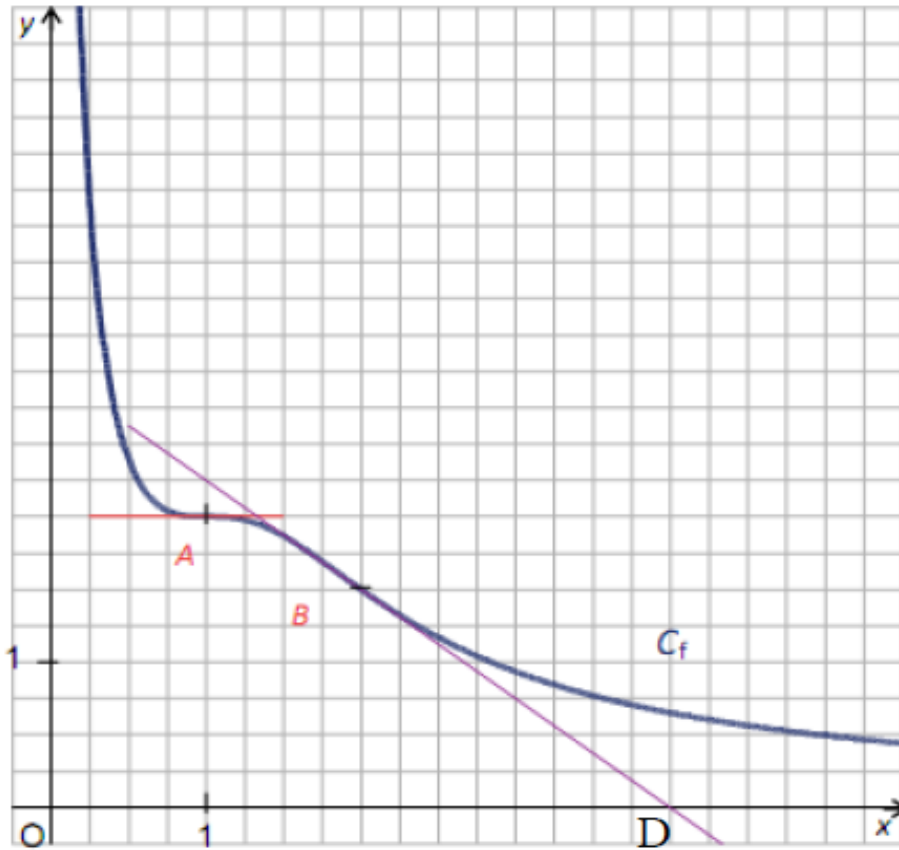


Figure 2 : (Exercice n°4)

