Devoir de synthèse N°1

Durée : 120 mn ***Mathématiques *** Coef : 3

Exercice N°1 : 03 pts

Cocher la repense juste et justifier votre repense.

1°) la fonction f définie sur [0 ; +∞[\ $\{1\}$ par f (x) = $\frac{2x}{x^2-1}$ est une fonction impaire

a) Vrai b) faux

2°) si g une fonction définie au voisinage de l'infini telque : $\lim_{\infty} g(x)$ = + ∞ et $\lim_{\infty} \frac{g(x)}{x}$ = 2 alors la représentation graphique de g a

a) Branche parabolique au voisinage de (+∞)
b) La droite Δ : y = 2x -1 comme asymptote au voisinage de (+∞)
c) On ne peut pas conclure

3°) l'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) . soient A (1.1.1) et B(1 ;0 ;1)

Les vecteurs $\vec{i}$; $\vec{j}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont coplanaires : vrai ◯ faux ◯

Exercice N°2 : 06 pts

Dans le plan complexe P muni d'un repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) on considère les points A et B d'affixe respectives a et 1

Ou a est un nombre complexe différent de 1 . soit la fonction f : P \ { B } $\longrightarrow$ P

$M_z \longmapsto M'_{z'}$

Telle que z' = $\frac{z-a}{z-1}$

] – 1°) Montrer que les affixes des points invariant par f sont les solutions de l'équation

(E) : z^2- 2 z +a = 0

2°) On suppose que : a = 1 - $e^{i\theta}$ avec $\theta \in [\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} [$.

a) Résoudre l'équation (E) .
b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle .

3°) on note M' et M'' les points d'affixes respectives (1 + $e^{i\theta}$) et (1 - $e^{i\theta}$) .

a) Montrer que pour tout $\theta \in [\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}[$ le triangle OM'M'' est rectangle en O .

b) Déterminer θ pour que le triangle OM'M'' soit isocèle.

][- on pose a = (-1)

1°) Montrer que : $(z' - 1)(z - 1) = 2$

2°) a°) Montrer que : $(\vec{u} ; \overrightarrow{BM}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 \, [2\pi]$

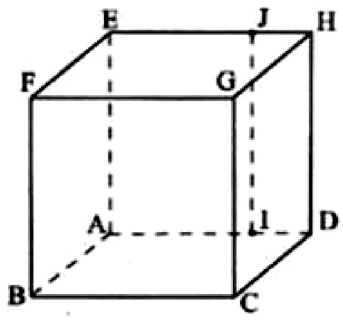
b°) Déduire que [B A) est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{BM'})$.

Exercice N°3 :04 pts

Dans la figure ci-contre,

- ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{EJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD}$

On note $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$ et on munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



1) a) Déterminer les coordonnées des points F, G, I et J.

b) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice α est un réel et M est un point de la droite (IJ) de coordonnées $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha\right)$

2) a) Vérifier que $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \alpha\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$ et que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM} = \alpha\,\vec{i} + \vec{k}$.

b) En déduire que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) a) Montrer que $(\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM}).\overrightarrow{AG} = -\alpha$ et que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM}).\overrightarrow{BG} = 1$.

b) Montrer que

(M,A,F et G sont coplanaires) si et seulement si (M et I sont confondus).

c) Déterminer les points M de la droite (IJ) pour lesquels AFMG et BCMG sont deux tétraèdres de même volume .

Exercice N°4 :07 pts

[- soit la fonction f définie sur IR\{-2} par $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$. on note ζ_f sa courbe représentative dans un repere orthonorme $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1°) Montrer que pour tout $x \neq (-2)$: $f(x) = 2 - x - \frac{3}{2+x}$

2°) a) Montrer que le point I (-2 ; 4) est un centre de symétrie pour ζ_f

b) Déduire le domaine d'étude de f

3°) a) dresser le tableau de variation de f sur] -2 ; +∞[

b) Construire la courbe ζ_f .

4°) on note g la restriction de f à l'intervalle [0 ; 1]

a) Montrer que g réalise une bijection de [0 ; 1] sur un intervalle J qu'on précisera .

b) Montrer que pour tout $x \in J$: $g^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 8x + 4}$

c) En déduire que g^{-1} est dérivable sur J et calculer $(g^{-1})'(x)$.

5°) on considère la suite U définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = g(U_n)$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$; $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

b) Montrer que la suite U est convergente

c) Déterminer $\lim_{\infty} U_n$

Bon Travail