LYCÉE IBN CHARAF	*DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1*
A.S. 2016 / 2017	***MATHÉMATIQUES***
Section : **4ème Sc. expérimentales**	Durée : **2h** | Coefficient : **3** | Prof./ Maayoufi

---

L'épreuve comporte deux pages numérotées de 1/2 à 2/2.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Exercice 1 (6 points)

I- Résoudre dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-(2+i)z+2i=0$.

II- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives i et 2.

A tout point M du plan d'affixe z ($z\neq 2$) on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\dfrac{z-i}{iz-2i}$.

1) a/ Montrer que : $|z'|=\dfrac{AM}{BM}$.

b/ En déduire que lorsque M décrit la médiatrice du segment [AB], le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

2) On suppose que $z\neq i$ et $z\neq 2$

a/ Montrer que : $\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM'}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{BM}\,,\,\overrightarrow{AM}}\right)-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

b/ En déduire, que si M appartient à la droite (AB), le point M' appartient à une droite que l'on déterminera.

III- On considère les nombres complexes : $\alpha=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

1) Écrire α et β sous forme exponentielle.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.

a/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $z^2-2z+1-e^{2i\theta}=0$.

b/ Écrire les solutions de (E) (z_1 et z_2) sous forme trigonométrique.

c/ Déterminer θ pour que l'on ait : $z_1=\alpha$ et $z_2=\beta$.

Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,2,-1)$ et $B(2,1,1)$.

1) Déterminer une équation du plan (Q) passant par A et perpendiculaire à la droite (AB).

2) Soit (P_m) le plan d'équation : $x+y-m+3=0$ où m est un paramètre réel.

a/ Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan (P_m).

b/ pour quelle valeur de m la droite (AB) est-elle incluse dans le plan (P_m) ?

c/ Montrer que le plan (P_m) est perpendiculaire au plan (Q).

3) Soit B' le projeté ortogonal de B sur (P_m) et A' le projeté orthogonal de A sur (P_m). Déterminer les valeurs de m pour que ABB'A' soit un carré.

Exercice 3 (4 points)

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle]0,1[. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha)U_n - \alpha}{U_n} \end{cases}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n \geq 1$.

2) Montrer que (U_n) est une suite croissante.

3) En déduire que (U_n) est convergente et trouver sa limite.

4) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - \alpha}$.

a/ Montrer que (V_n) est une suite géometrique de raison α.

b/ Exprimer V_n en fonction de n et α. En déduire l'expression de U_n en fonction de n et α.

c/ Retrouver alors la limite de (U_n) quand n tends vers $+\infty$.

Exercice 4 (6 points)

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ et soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

1. **a-** Étudier la parité de la fonction g.

b- Étudier les variations de la fonction g.

c- justifier qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

d- Tracer le graphe de g. En déduire le graphe de g^{-1} la fonction réciproque de g.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$.

a- Dresser le tableau de variation de h.

b- Déterminer les asymptotes à la courbe de C_h.

c- Déterminer la position de C_h par rapport à ses asymptotes et tracer le graphe de h dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3. **a-** Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

b- Montrer que : $h^{-1}(x) = \dfrac{1}{4x-4} + 1 - x$.

c- Tracer le graphe de $C_{h^{-1}}$.