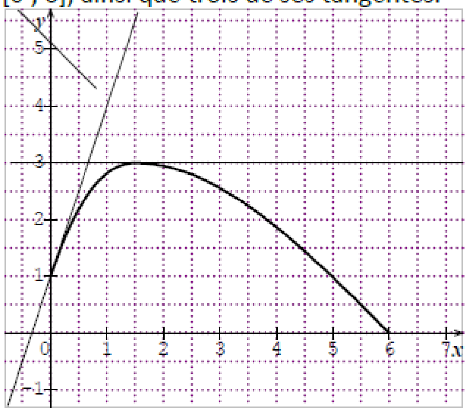
EXERCICE ❶ $(5pts)$

a) voici **la courbe C1 d'une fonction f** définie sur l'intervalle [0 ; 6], ainsi que trois de ses tangentes.



On note F une primitive de f.

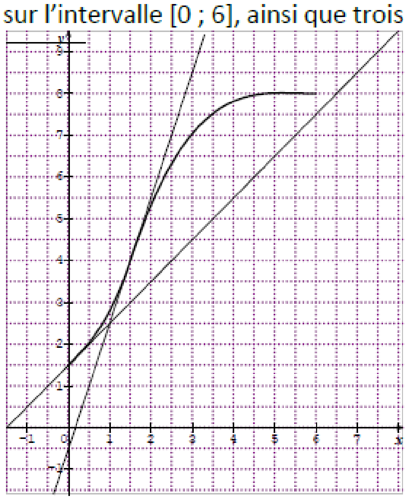
Lire :

- f(0) =
- f ' (0) =
- F ' (0) =

- f(6) =
- f ' (6) =
- F ' (6) =

- f(1.5) =
- f ' (1.5) =
- F ' (1.5) =

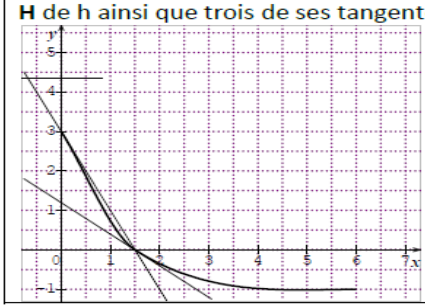
b) Voici la **courbe C2 de la dérivée g '** d'une fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 6], ainsi que trois de ses tangentes:



Lire :

- g ' 0) =
- g ' (6) =
- g ' (1.5) =

c) On considère une fonction h définie sur l'intervalle [0 ; 6], et H une de ses primitives.. Voici la **courbe C3 de la primitive H** de h ainsi que trois de ses tangentes.:



Lire :

- h(0) =
- H (0) =

- h(6) =
- H (6) =

- h(1.5) =
- H (1.5) =

d) En utilisant les renseignements précédents :

* une des courbes C2 ou C3 est celle de la dérivée f ' de f, laquelle ?

* une des courbes C2 ou C3 est celle de la primitive F de f, laquelle ?

EXERCICE ❷ (4pts)

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$par : $\begin{cases} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq 1$.

   (b) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\frac{1}{2^n}}{u_{n+1} + u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (c) En déduire que (u_n) est une suite croissante.

2. (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n)$.

3. (a) Montrer que $u_n^2 = 2\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire que $u_n \leq \sqrt{2}$,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Montrer que (u_n) est une suite convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE ❸ (5pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}$

1. (a) Déterminer D_f.

   (b) Etudier la dérivabilité de f sur $[-2, 2]$

2. (a) Montrer que $f'(x) = -3x\sqrt{4 - x^2}$, pour tout $x \in [-2, 2]$.

   (b) Dresser le tableau de variation de f.

   (c) Montrer que la restriction h de f à $[0, 2]$ est une bijection de $[0, 2]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[-2, 2]$ une solution unique α ;et que $1.6 < \alpha < 1.7$

   (b) Tracer C_f et C_h dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

4. On considère la fonction g définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = f(2\sin x)$

   (a) Etudier la dérivabilité de g et calculer $g'(x)$.

   (b) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J' que l'on déterminera.

   (c) Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1} et calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$.

EXERCICE ❹ (6pts)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0$

1. (a) Vérifier que $2i$ est une racine de (E).

   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orth direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique $2cm$) ,soient les points A, B et C d'affixes respectives: $z_A = 2$; $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

   (a) Donner la forme exponentielle de z_B puis z_C.

   (b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

3. (a) Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.

   (b) En déduire $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$.

   (c) Déterminer et construire l'ensemble D des points $M(z)$ du plan tels que $|z| = |z - 2|$.

4. A tout point $M(z)$ tel que $z \neq z_A$,on associe le point $M'(z')$ défini par $z' = \dfrac{-4}{z-2}$

   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z = \dfrac{-4}{z-2}$

   (b) En déduire les points B' et C' associés aux points B et C.

   (c) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

5. (a) Montrer que $|z' - 2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$, $\forall\ z \neq 2$

   (b) On suppose que $M \in D$ où D est l'ensemble défini à la question $3)c)$.Montrer que M' associé à M appartient à un cercle (ξ) dont on précisera le centre et le rayon.