LYCÉE OUED ELLIL

DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 1

MATHÉMATIQUES

CLASSES : 4IEME ANNÉE SECONDAIRE

SECTION : SCIENCES EXPÉRIMENTALES

DURÉE : 2 HEURES

PROF : BELLASSOUED MOHAMED

ANNÉE SCOLAIRE : 2017-2018

EducMath

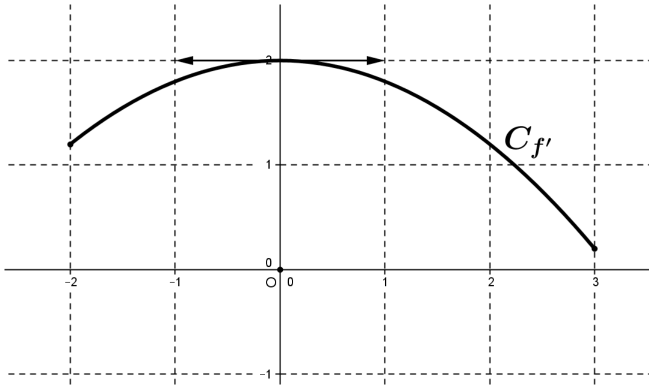
Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69

EXERCICE 1: 3 POINTS

BAREME

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-2;3]$. On donne ci-contre la représentation Graphique de <u>la fonction dérivée</u> f' de f

Répondre par **vrai** ou **faux** sur la feuille annexe . **Aucune justification n'est demandée..**



1• $f(-2) \geq f(3)$ — 0.5

2• f est une bijection de $[-2;3]$ sur $f([-2;3])$ — 0.5

3•La courbe C_f admet une seule tangente parallèle à L'axe des abscisses . — 0.5

4•f admet un extremum local en 0 . — 0.5

5•Le point $A(0;f(0))$ est un point d'inflexion de la Courbe C_f — 0.5

6• $|f(3)-f(-2)| \leq 10$ — 0.5

EXERCICE 2: 7 POINTS

<u>Le plan est rapporté a un repère orthonormé</u> $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative

1-a- Etudier la dérivabilité de f a droite de 0 . interpréter graphiquement le résultat . — 0.75

b- Montrer que la droite Δ : $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$ — 0.5

c - Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que $f'(x)=\dfrac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}$ — 0.75

2-a- Montrer que f est une bijection de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$. On note f^{-1} sa fonction réciproque — 0.5

b-Calculer $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ — 0.75

c-Vérifier que f^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ — 0.25

3-Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ — 0.75

4- La courbe $\mathcal{C}_f$ est tracée dans la feuille annexe .
Tracer soigneusement sur la feuille annexe la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ de f^{-1} — 0.75

5-On considère la fonction g définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=f(\sin^2 x)$

a-Vérifier que $g(x)=\tan x$ — 0.5

b- Montrer que g est une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque — 0.75

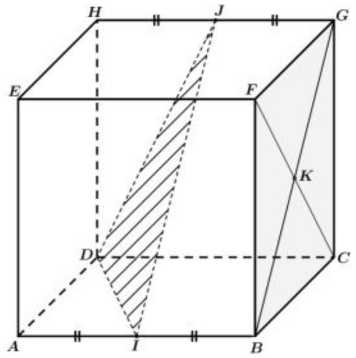
c- Montrer que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a : $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ — 0.75

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69

EXERCICE 3: 6 POINTS

BAREME

- La figure 1 ci-contre est un cube ABCDEFGH
- I et J les milieux respectives des segments $[AB]$ et $[GH]$
- K désigne le centre de la face BCGF



L'espace est rapporté a un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1-a-Calculer les coordonnées des points D , I , J et K 1

b- Montrer que $\overrightarrow{DI} \wedge \overrightarrow{DJ}$ à pour composantes $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 0.5

c- Calculer le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre EDIJ 0.5

2-On désigne par $\mathscr{P}$ le plan défini par les points D , I et J

Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $\mathscr{P}: 2x + y - z - 1 = 0$ 0.5

3-Soit Δ la droite passant par E et orthogonal au plan $\mathscr{P}$

a-Donner une équation paramétrique de la droite Δ 0.5

b-Vérifier que K est un point de Δ 0.25

c- Soit le point $L = \Delta \cap \mathscr{P}$. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 0.25

d-Vérifier que le point L est le centre de gravité du triangle BEG 0.5

4- Soit $\mathcal{S}$ L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \frac{4}{3} = 0$$

a-Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère de centre K et dont on précisera le rayon r 0.5

b-Vérifier que le point L est un point de $\mathcal{S}$ 0.25

c-En déduire que plan $\mathscr{P}$ est tangent au sphère $\mathcal{S}$ 0.5

d-Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$ parallèle au plan $\mathscr{P}$ et tangent au sphère $\mathcal{S}$ 0.75

EXERCICE 4: 4 POINTS

1-a-Donner l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 4\sqrt{2}(-1 + i)$ 0.75

b-En déduire que les racines cubiques de u sont : $u_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $u_1 = 2e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$; $u_2 = 2e^{i\left(\frac{-5\pi}{12}\right)}$ 0.75

2-a-Enoncer les formules d'Euler 0.5

b-Soit θ un réel tel que $\theta \neq 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{1}{1 - e^{i\theta}} = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)i$ 1

3-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathcal{E}$: $(2z - 1)^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)z^3$ 1

On donnera les solutions sous formes cartésiennes

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69

FEUILLE ANNEXE

NOM ______________________ PRENOM ______________________ CLASSE $4^{\text{iéme}}$ sciences exp

EXERCICE 1: 3 points

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-2;3]$. On donne ci-contre la représentation Graphique de la **fonction dérivée** f' de f

Répondre par **vrai** ou **faux . Aucune justification n'est demandée..**

1• $f(-2) \geq f(3)$ — 0.5

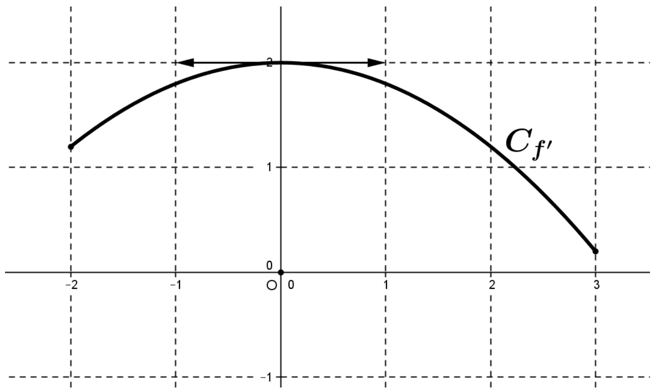
2• f est une bijection de $[-2;3]$ sur $f([-2;3])$ — 0.5

3•La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une seule tangente parallèle à L'axe des abscisses . — 0.5

4•f admet un extremum local en 0 . — 0.5

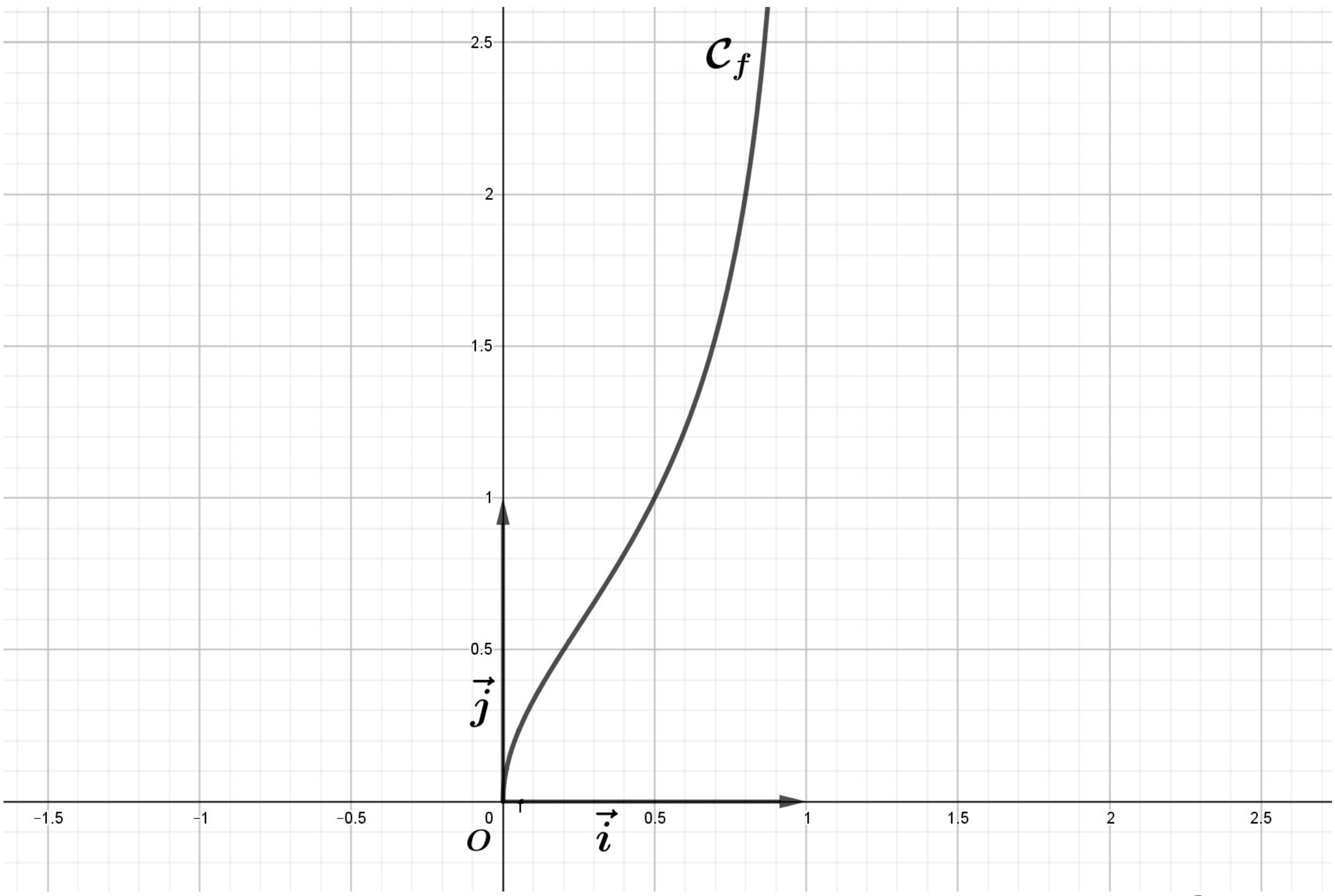
5•Le point $A(0;f(0))$ est un point d'inflexion de la Courbe $\mathcal{C}_f$ — 0.5

6• $|f(3)-f(-2)| \leq 10$ — 0.5



QUESTION						
REPONSE (V OU F)						

EXERCICE 2:



Librairie Devoir.TN 53 04 42 33 | 99 06 27 69