LYCEE NAHJ EL MENZEH BENI KALLED	DEVOIR DE SYNTHESE N°1	PR: KADDOUR ABDELHAMID 4é SC

EXERCICE N° 1(5points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l' équation (E) : $2z^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3}+i)z + 1 + \sqrt{3}\,i = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') : $2Z^6 - \sqrt{3}(\sqrt{3}+i)z^3 + 1 + \sqrt{3}\,i = 0$

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On considère les points A et B d'affixe respectives $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = i\, z_A$. Soit I le milieu de [AB]

a) Donner la forme exponentielle de z_A *et* z_B

b) Placer les points A, B , et I dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

4) a) Montrer que le triangle OAB est un triangle rectangle et isocèle

b) En déduire que $OI = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

c) Ecrire z_I sous la forme algébrique et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12}$

EXERCICE N°2 (5points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{v}, \vec{v})$

Soit les points A , B , et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -z_B$

1)a- Ecrire sous formes exponentielle z_A , z_B *et* z_C

b- Montrer que les points A , B et C appartiennent au cercle (ζ) de centre O et de rayon 2

c- Construire les points A ,B et C

2) a- Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A

b- Calculer l'aire du triangle ABC

3) Soit M un point du plan d'affixe $z_M = 2e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[$ et S l'aire du triangle MBC

a- Vérifier que M $\in (\zeta)$ et justifier que le triangle MBC est rectangle en M

b- Montrer que $S = 2\left|e^{2i\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right|$

c- Vérifier que $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)} - e^{-i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}\right) = e^{i2\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}}$

d- En déduire que S = $4\left|\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right|$

4) Déterminer la valeur de θ pour laquelle S est maximale

EXERCICE N° 3 (4points)

1° Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur [a, a+1]

par f(x) = $\sqrt{x}$

a) Montrer que pour tout x de [a ,a+1] on a : $\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$

b)En déduire que pour tout x de [a ,a+1] on a

$$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \qquad (1)$$

2° Soit (S_n) la suite définie pour n ≥1 par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$

a) Montrer en utilisant (1) ,que $S_n - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} - 1 \leq S_n$

b) En déduire $\lim_{+\infty} S_n$ et $\lim_{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{S_n}\ \frac{\sqrt{n}}{S_n}$

3° Soit $t_n = S_n - \sqrt{n}$

a) Montrer que (t_n) est minorée

b) Montrer que (t_n) est décroissante

c) En déduire que(t_n) est convergente

EXERCICEN°4(6points)

Soit f la fonction définie sur]0 , +∞ [par f(x) = $\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}}$

1) a- Calculer $\lim_{0^+} f(x)$, *interpréter graphiquement*

b- Calculer $\lim_{+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement

2) a- Montrer que pour tout x €]0 ,+∞ [, $f'(x) = \frac{x^2-1}{4x^2\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}}}$

b- Dresser le tableau de variation de f

3)Soit g_1 *et* g_2 les restrictions de f à chacun des intervalles]0 ,1] et [1 + ∞ [

a- Montrer que g_1 réalise une bijection de]0 , 1] sur un intervalle J que l'on déterminera et que g_2 réalise une bijection de [1 , + ∞ [sur un intervalle I que l'on déterminera

b- Donner l'expression de ${g_1}^{-1}$ (x) et ${g_2}^{-1}$ (x)

4) a- Soit n un entier naturel non nul . Montrer que l'équation f(x) = $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ admet exactement deux solutions α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$

b- Calculer α_4 et β_4

5) On considère la fonction h définie sur [0 , +∞ [par

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{2x}\left(f(x) - \sqrt{1+\frac{1}{n}} \right) & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

a- Montrer que h est continue en 0

b- Déterminer le signe de h(x) pour tout x € [0 , + ∞[