Mr : KSAIER Mr : B rhouma	REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	DATE : 24/01/2018
LYCEE : 2MARS KORBA	DEVOIR DE SYNTHESE °N1	NIVEAU : 4^{em} scie exp
DUREE : 2 HEURS	EPREUVE : MATHEMATIQUE	COFFICIENT 3

EXERCICE N°1 (4 points)

La courbe ξf dans l'annexe jointe représentée dans un repère orthonormé direct $R(O;\vec{i};\vec{j})$ représente une fonction f définie strictement croissante sur IR. Les droites $\Delta: y = \frac{5}{2}$ et $\Delta': y = -\frac{5}{2}$ sont des asymptotes à ξf

1) Déterminer graphiquement
   a) $f(0)$; $f'(0)$
   b) Déterminer le tableau des variations de f
   c) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera
   d) Déterminer $f^{-1}(0)$; $(f^{-1})'(0)$
   e) Tracer la courbe de ξf^{-1} sur la copie à rendre
2) Sachant que $g(x) = \frac{5x}{2\sqrt{x^2+1}}$ est la restriction de f sur $[0;+\infty[$

   Montrer que : $g'(x) = \frac{5}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
3) a) Soit A un point de ξf d'abscisse 1. Déterminer les coordonnées de A

   b) Déduire $(g^{-1})'(\frac{5}{2\sqrt{2}})$
4) Montrer que $g^{-1}(x) = \frac{2x}{\sqrt{25-4x^2}}$

EXERCICE N°2 (6 points)

Soit $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ une fonction définie sur $]0;+\infty[$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$
2) Montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$. vérifie que $\alpha \in [1;2]$
3) Montrer que pour tout $x \in]1;2[$; $|f'(x)| < \frac{3}{4}$
4) a) Soit (u_n) une suite tel que $u_0 = \frac{5}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Montrer que $1 < u_n < 2$ pour tout $n \in IN$

   b) Montrer que pour tout entier $n \in IN$: $|u_{n+1} - \alpha| < \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$

   c) En déduire que tout entier $n \in IN$: $|u_{n+1} - \alpha| < \left(\frac{3}{4}\right)^n$
5) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N°3 (6 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $R(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les points A (1 ; 2 ;-1) ; B (-1 ; 0 ;2) ; C(0 ;1 ;-1) et D(2 ;0 ;1)

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

   b) Déduire que A ; B et C sont trois points non alignes

c) Déduire que l'équation cartésienne du plan P qui passe par A ; B et C est donner par $P: x - y + 1 = 0$

d) Calculer l'air du triangle ABC

2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AD)

b) Etudier la position relative de la droite (AD) et le plan P

c) Calculer le volume de tétraèdre DABC

4) Soit H le projeté orthogonal de D sur P

a) Calculer DH

b) Ecrire une équation paramétrique de la droite (DH)

c) Déterminer les coordonnées de H

EXERCICE N°4 (4 points)

1) Vérifier que $(-1 + 3i)^2 = -8 - 6i$
2) On considère dans □ l'équation $(E): z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 6i)z + 3 - 4i = 0$
   a) Montrer que $z_0 = i$ est une solution de l'équation (E)
   b) Ecrire l'équation (E) sous la forme $(E): (z - i)(z^2 + bz + c) = 0$ ou b et c sont deux nombres complexes à déterminer
   c) Résoudre dans □ l'équation (E)
3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $R(O: \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A ; B et C d'affixes respectives, $a = i$; $b = 1 + 2i$ et $c = 2 - i$

   Montrer que : ABC est un triangle rectangle en A

Nom……………………………………….& Prénom ……………………………..Classe …………

Annexe à rendre avec la copie