SECTION SCIENCES EXP. $4^{\text{ème}}$

# DEVOIR DE SYNTHÈSE # 1

# MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 H

PR: SOLTANI M.

Le sujet comporte 2 pages numérotés de 1 à 2
Une copie non soignée sera sanctionnée.

## Exercice 1 ( 5 points)

On note : $u = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1. Donner la forme exponentielle de $u$ ,puis vérifier que : $u^3 = -1$ et que $1 - u + u^2 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - u^2 z - u = 0$.
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectives $z$ , $-u z$ et $u^2 z$. ou $z$ est un nombre complexe non nul.
   (a) Montrer que $O$ est le centre de gravité du triangle $ABC$.
   (b) Montrer que $z_P = -u^2(z_N - z_M) + z_M$.
   (c) Déduire la nature du triangle $ABC$

## Exercice 2 ( 5 points)

l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(-1, 0, 0)$, $B(1, 0, 2)$ et $C(3, -2, 2)$.

1. (a) Montrer que les points $A$, $B$et $C$ ne sont pas alignés.
   (b) On note $\mathscr{P}$ le plan $(ABC)$ .Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est :$x + y - z + 1 = 0$.
2. Soit $\mathscr{S} := \{M x, y, z); \quad x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2z - 1 = 0\}$
   (a) Montrer que $\mathscr{S}$ est une sphère dont on précisera le centre $\Omega$ et le rayon $R$.
   (b) Montrer que $\mathscr{P} \cap \mathscr{S}$ est le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle $ABC$.
   (c) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
3. Soit $\Delta$ la droite dont une représentation paramétrique est $\Delta : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

   Montrer que $\Delta$ est tangente à la sphère $S$.
4. Montrer que pour tout point $M$ de $\Delta$ , le volume du tétraèdre $MABC$ est constant.

## Exercice 3 .( 3 points)

Pour tout $n \geq 1$ on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t)dt$ .

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
2. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ .
3. (a) A l'aide d'une double intégration par parties montrer que :

$$a_n = \frac{\pi}{(n+2)(n+1)} - \frac{\pi^2}{(n+2)(n+1)} a_{n+2}$$

   (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 a_n$

## Exercice 4 .( 7 points)

1. Pour tout réel $x$ de $I = ]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ , on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{t^2}{1+t^2} dt$
   (a) Montrer que $F$ est dérivable sur $I$ et que pour tout $x \in I$, $F'(x) = \tan^2 x$.
   (b) Déduire que pour tout réel $x$ de $I$ on a $F(x) = \tan x - x$.
   (c) Calculer alors l'intégrale $\xi = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$
2. Soit $\varphi$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, 2[$ par $\varphi(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$.
   On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   On donne ci-contre le tableau de variation de $\varphi$.

| $x$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | $+$ | |
| $\varphi(x)$ | $0 \nearrow +\infty$ | |

   (a) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$ puis tracer $(\mathscr{C})$ et $\Delta$.
   (b) Montrer que $\varphi$ possède une fonction réciproque $\varphi^{-1}$ définie et continue sur un intervalle $J$ que l'on précisera.
   (c) Tracer $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de $\varphi^{-1}$.
   (d) Montrer que pour tout $y \in J$ on a : $\varphi^{-1}(y) = \dfrac{2y^2}{1+y^2}$
   (e) Calculer en unité d'aire , l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.