Prof :B.Anis L.S.ElKsour	Devoir de synthèse n°1 Durée :2h	Niveau :4ème sc-exp A.S :2018-2019

Exercice n°1(5.5pts)

1)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :$z^2-(1+4i)z+4i=0.$

2)Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle.

3)Pour tout nombre complexe z on pose

P(z)=$z^3+(2-4i)z^2-(3+8i)z+12i.$

a)Vérifier que les solutions de (E) sont des solutions de l'équation P(z)=0

b)Résoudre alors l'équation P(z)=0.

Exercice n°2(4pts)

I)1)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2i\bar{z}=0$

(on peut poser z=x+iy ; $x\in IR\ et\ y\in IR$)

2)Dans le plan complexe on considère les points O , A, B et C d'affixes respectives $z_O=0$, $z_A=-2i$, $z_B=\sqrt{3}+i\ et\ z_C=-\sqrt{3}+i.$

a)Ecrire z_A ; $z_B$et z_C sous forme exponentielle.

b)Montrer que ABC est un triangle équilatéral

c)Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un losange.

II)A tout point M d'affixe z≠ z_C on associe le point M' d'affixe z'=$\frac{z+2i}{z+\sqrt{3}-i}$

1)Ecrire z'_O sous forme cartésienne.

2)Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z' est réel.

Exercice n°3(4.5pts)

Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles définies sur IN par $U_0=1$,$V_0=2$

$$U_{n+1}=\frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}\quad et\ V_{n+1}=\frac{U_n+V_n}{2}\quad \forall n\in IN.$$

1)a)Montrer que $V_{n+1}-U_{n+1}=\frac{(V_n-U_n)^2}{2(U_n+V_n)}\quad \forall n\in IN$

b)Montrer que $0 < U_n < V_n \ \forall\, n \in IN$

2)a)Montrer que $0 < V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n) \forall\, n \in IN$

b)En déduire que $0 < V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \ \forall n \in IN.$

3)a)Montrer que U est croissante et V est décroissante .

b)En déduire que U et V sont adjacentes.

<u>Exercice n°4(6pts)</u>

Soit f la fonction définie par f(x)=$1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1)Déterminer l'ensemble de définition de f.

2)Calculer $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)\ et\ \lim_{1^-} f(x).$

3)Montrer que f est dérivable sur]-1 ;1[et que $f'(x) = \frac{-1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3} \ \forall x \in]-1;1[$

4)a)Montrer que l'équation f(x)=x admet dans]-1 ;1(une seule

solution α, vérifier que $\alpha \in]0;\frac{1}{2}[$.

b)Montrer que pour tout x∈ $\left[0;\frac{1}{2}\right] \ |f'(x)| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9}$

c)En déduire que $|f(x) - \alpha| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9}|x - \alpha| \ \forall\ \mathrm{x} \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

5)Soit h la fonction définie sur]0 ;π[par h(x)=f(cosx)

Montrer que h est dérivable sur]0,π[et montrer que h'(x) =$\frac{1}{sin^2x} \ \forall x \in]0,\pi[$

<u>Bon travail</u>