Exercice N .01(06 points)

Soit f la fonction définie sur IR^* par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x\succ 1\\ \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\sin\left(\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}\right) & \text{si } x\prec 1\\ 0 & \text{si } x=1\end{cases}$

On désigne par (ξ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) a- Montrer que pour tout $x\in\,]0,1[$, $1-\dfrac{1}{x^2}\le f(x)\le\dfrac{1}{x^2}-1$

b- En déduire que f est continue à gauche en1.

2) Calculer $\lim\limits_{-\infty} f$, $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{1^+} f$

Interpréter graphiquement les résultats.

3) a- Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{-2}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$

b- Dresser le tableau de variation de f sur $]1,+\infty[$.

4) Soit g la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 2 & \text{si } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

a- Montrer que g est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$

b- Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $g'(x)=\dfrac{-2\cos x}{\sin^2 x}$

c- Montrer que pour tout réel $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=\dfrac{2}{\sin x}$

5) a- Montrer que l'équation $g(x)=2x$ admet une unique solution $\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right[$

b- Montrer que pour tout réel $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $|g'(x)|\le 4\sqrt{3}$

c- En déduire que pour tout réel $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\left|\dfrac{1}{\sin x}-\alpha\right|\le 2\sqrt{3}|x-\alpha|$

Exercice N .02(07 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,1)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,2)$ et $I(-1,1,-1)$

1) a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b- Calculer le volume V du tétraèdre $ABCI$

2) On désigne par P le plan (ABC).

Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $x+y+2z-4=0$.

3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que :

$x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-8=0$.

a- Montrer que (S) est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{11}$

b- Montrer que $p\cap(S)$ est un cercle ζ de rayon $\sqrt{5}$.

c- Vérifier que le segment $[BC]$ est un diamètre du cercle ζ .

4) Soit a un réel et M le point défini par : $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$

a- Déterminer à l'aide du réel a, les coordonnées du point M.

b- Montrer que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM}=(a-1)(11a+3)$

c- En déduire que la droite (AB) recoupe le cercle ζ au point E définie par $\overrightarrow{AE}=\frac{-3}{11}\overrightarrow{AB}$

d- Montrer que le volume V' du tétraèdre $AECI$ est égale à $\frac{3}{11}V$.

Exercice N .03(07 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x-1+2\ln x$

a- Etudier les variations de g .

b- Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

2) On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x \\ f(0)=0 \end{cases}$

On désigne par (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Montrer que f est dérivable à droite en 0.

b- Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$

c- Montrer que $f'(x)\geq 0\ \forall x\leq 1$ et que $f'(x)\leq 0\ \ \forall x\geq 1$

d- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α

et que $\frac{7}{4}\prec\alpha\prec 2$.

3) a- Déterminer une équation cartésienne de Δ la tangente à (ζ) au point O .

b- Etudier la position relative de (ζ) par rapport à Δ et Tracer Δ et (ζ)