

Num :53633979

Devoir de Synthèse N°1

4<sup>ème</sup> année

Le Mercredi 31/10/2018

MATHEMATIQUES

Durée : 2 H

Mr Bechir Fehri

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est correcte. L'élève doit indiquer sur sa copie, avec justification, le numéro de la question et la lettre convenable à la réponse choisie.

Une réponse correcte et justifiée vaut 0.75 point, une réponse correcte et non justifiée vaut 0.25 point et une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- 1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = x^2(1 - \sin \frac{1}{x^2})$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$   
a)  $+\infty$  b) 0 c) 1
- 2)  $1+i$  est une racine quatrième de :  
a)  $-4$  b)  $4$  c)  $4i$
- 3) Si  $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$  alors  $\arg(i\bar{z}) \equiv$   
a)  $\frac{\pi}{6} [2\pi]$  b)  $-\frac{\pi}{6} [2\pi]$  c)  $\frac{\pi}{3} [2\pi]$
- 4) L'équation  $z^2 = (\bar{z})^2$  admet dans  $\mathbb{C}$   
a) Une seule racine b) deux racines distincts c) une infinité de racines

Exercice 2 :(6 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-2, +\infty[$  par :  $f(x) = x-1 + \sqrt{x+2}$ .

- 1) a) Montrer que  $f$  est continue sur  $[-2, +\infty[$ .
- b) montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $[-2, +\infty[$ .
- 2) a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]-1, 0[$  une unique solution  $\alpha$ .
- b) Donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
- 3) donner le signe de  $f(x)$  sur  $[-1, 0]$ .
- 4) a) Montrer que :  $\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0$   
b) En déduire la valeur exacte de  $\alpha$ .
- 5) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(x^2(1 - \cos \frac{\pi}{x})\right)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} f\left(\frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-1}\right)$



Num :53633979

**Exercice 3 : (7 points)**

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $Z^2 - (\sqrt{3} + 3i)Z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

- 1) a) Vérifier que :  $(-\sqrt{3} + i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$   
b) Résoudre l'équation (E)
- 2) Pour tout  $Z$  dans  $\mathbb{C}$ , on pose  $p(Z) = Z^3 - (\sqrt{3} + 5i)Z^2 - 4(2 - i\sqrt{3})Z + 4(\sqrt{3} + i)$ 
  - a) Calculer  $p(2i)$
  - b) Trouver les nombres complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tel que : pour tout  $Z$  dans  $\mathbb{C}$  on a  $p(Z) = (Z-2i)(Z^2 + \alpha Z + \beta)$
  - c) Résoudre l'équation  $p(Z) = 0$
- 3) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $a = 2i$ ,  $b = \sqrt{3} + i$  et  $c = \sqrt{3} + 3i$ 
  - a) Donner l'écriture exponentielle de a et b. En déduire la construction des points A, B et C
  - b) Donner l'écriture exponentielle de c et  $\frac{c-a}{b-a}$ .
  - c) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.
- 4) a) Vérifier que :  $b = c - a$   
b) en déduire que le quadrilatère OBCA est un losange.

**Exercice 4 : (4 points)**

Soient  $Z_1$  et  $Z_2$  deux nombres complexes non nuls et non réels tels que :  $Z_1 \times Z_2 = 1$  et  $|Z_1 - Z_2| = 2$ . Soit  $r$  le module de  $Z_1$  et  $\theta$  un argument de  $Z_1$ . On suppose que  $r \geq 1$  et  $\theta \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ . Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ . Soient les points A, B,  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives -1, 1,  $Z_1$  et  $Z_2$

- 1) a) Donner l'écriture exponentielle de  $Z_2$ .  
b) Montrer que :  $|Z_1 - Z_2|^2 = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \cos 2\theta$   
c) Déduire que :  $r - \frac{1}{r} = 2 \cos \theta$
- 2) Calculer les distances  $AM_2$  et  $BM_1$ .
- 3) Montrer que :  $(AM_1) \parallel (BM_2)$
- 4) Soit  $\Delta$  une demi-droite d'origine O incluse dans le premier quadrant et  $M_1$  un point de  $\Delta$ . Déduire de ce qui précède une construction de  $M_2$ .

**Bon Travail..mr**  
hechir

