

Lycée Tahar Sfar Mahdia	Devoir de synthèse n° 1 Mathématiques	Classes : 4 ^{ème} Sc exp 1+3
Date : 04 / 12 / 2018	Profs : Mme Turki N & Mr Meddeb T	Durée : 2 heures

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (6 pts)

1) a/ Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation :

$$(E): z^2 - 2iz - 2 = 0.$$

b/ Ecrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $[0; 2\pi[$. On considère dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E_\theta): z^2 - 2iz - 2\cos\theta e^{i\theta} = 0.$$

a/ Vérifier que : $-1 + 2\cos\theta e^{i\theta} = e^{2i\theta}$.

b/ Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) .

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A, B, M et N d'affixes respectives $i, 2i, i + e^{i\theta}$ et $i - e^{i\theta}$.

a/ Montrer que lorsque θ varie dans $[0; 2\pi[$, le point M varie sur un cercle \mathcal{C} de centre A dont on précisera le rayon.

b/ Vérifier que $[MN]$ est un diamètre de \mathcal{C} .

c/ Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles les points O, A et M soient alignés.

d/ Montrer alors que, lorsque $\theta \in [0; 2\pi[\setminus \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$, le quadrilatère OMBN est un rectangle.



Exercice n°2 : (5 pts)

On donne sur le graphique ci-contre la représentation graphique d'une fonction f continue sur $]-\infty; 1]$ dérivable sur $]-\infty; 1[$.

1) a/ En utilisant le graphique, déterminer $f'(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.

b/ Justifier l'existence d'un réel $\alpha \in [0; 1]$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

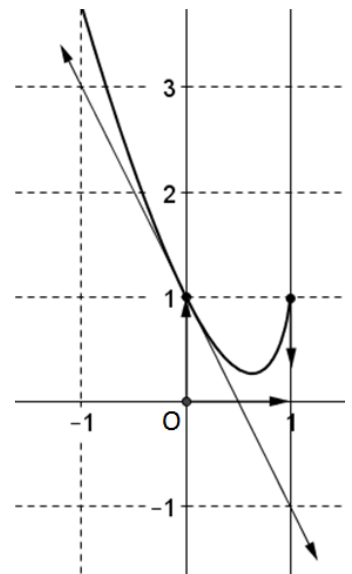
2) Soit g la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

Montrer que g est strictement croissante sur $]-2; +\infty[$ et déterminer $g(]-2; +\infty[)$.

3) Soit h la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par : $h(x) = f \circ g(x)$.

a/ Montrer que h est dérivable sur $]-2; +\infty[$.

b/ Calculer $h'(1)$.



Exercice n°3 : (9 pts)

1) Soit f la fonction sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3}{3+2x}$.

a/ Etudier le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$ et déterminer $f([0, +\infty[)$.

b/ Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet dans $[0, 1]$ une solution unique α .

2) Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 > 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a/ Déterminer la valeur de U_0 pour laquelle la suite U est constante.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que $U_0 = 1$.

b/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq 1$.

c/ Sans faire de calcul, montrer que $U_1 < \alpha$ et que $U_2 > \alpha$.

La suite U est-elle monotone ?

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$.

a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = f \circ f(V_n)$.

b/ Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} < V_n$.

c/ En déduire que la suite V est convergente vers α . Où α est le réel définie dans 1).

d/ En remarquant que $W_n = f(V_n)$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

4) a/ Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

b/ En déduire, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$.

c/ En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

d/ Retrouver alors la limite de la suite U .



Bonne chance

