Exercice n°1 (5 points)

L'espace est munie d'un repère orthonormé ($0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) .

On considère les points A(1,1,2) , B(1,-1,-2) ,C(2,-1,3) et D(2,2,2).

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis déduire que A, B et C ne sont pas alignés.

b) Calculer la distance du point C à la droite (AB).

c) Vérifier que AC = d(C,(AB) puis déduire la nature du triangle ABC.

d) Déterminer l'aire du triangle ABC.

2) a) Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

c) Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). Calculer DH.

3) Soit le point E (2, 2+3$\propto$,2$-\propto$) où $\propto$ est un réel.

a) Vérifier que E appartient à la droite (DC)

b) Déterminer $\propto$ pour que E soit le projeté orthogonale de A sur (DC)

Exercice n°2 : (7 points)

1) Soit l'équation (E): $Z^2 - \sqrt{5}(1+i)Z + 5i = 0$

a) Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

b) Déterminer l'autre solution de (E) sous forme exponentielle.

c) Déduire les solutions de l'équation (E') : $Z^4 - \sqrt{5}(1+i)Z^2 + 5i = 0$

(On admet que $\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O,$\vec{u},\vec{v}$). (Unité 2 cm)

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $Z_A = \sqrt{5}$, Z_B = -1+2i et $Z_C = i\sqrt{5}$

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$.

a) Placer le point B dans le repère.

b) Montrer que B appartient au cercle (C).

c)Construire le cercle (C) puis placer les points A et C.

3) a) Montrer que le triangle OAC est isocèle et rectangle en O.

b) Déterminer l'affixe du point D pour que OADC soit un carré.

c) Vérifier que $Z_D = \sqrt{10}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

4) La droite (OD) coupe le cercle de (C) en deux points E et E'.

a) Déterminer graphiquement l'affixe des points E et E' en justifiant votre réponse.

b) Vérifier que Z_E et $Z_{E'}$ sont deux racines quatrièmes de -25.

5) Soit F et F' les points d'affixes les deux autres racines quatrièmes de -25.

a) Quelle est la nature du quadrilatère du sommets E, E ', F et F '.

b) Construire F et F' puis déterminer graphiquement leurs affixes.

Exercice n°3 (8 points)

Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

1) a) Montrer que pour tout x $\in$ $]0,+\infty[$ on a : $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner une équation de la tangente (T) à C_f au point A d'abscisse 1.

2) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α puis vérifier que $1 \prec \alpha \prec 2$.

3) Montrer que pour tout x ≥ 1 on a : $|\boldsymbol{f'(x)}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) Soit la suite U définie sur IN par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout n $\in$ IN : $U_n \geq 1$.

b) Monter que pour tout n $\in$ IN : $|\boldsymbol{U_{n+1}} - \propto| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |\boldsymbol{U_n} - \propto|$

c) En déduire que : $|\boldsymbol{U_n} - \propto| \leq (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\boldsymbol{n}}$

d) Déduire la limite de la suite U.

5) Soit la fonction g définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = f(tanx).

a) Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ puis calculer g'(x).

b) Vérifier que pour tout $x \epsilon \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$: g(x) = $\frac{1}{sinx}$

c) Dresser le tableau de variation de g.

Bon travail