

EXERCICE N°1 : (03 points)

Soit le nombre complexe $z = i + e^{i\frac{\pi}{3}}$

1°. Ecrire z sous forme algébrique puis calculer son module .

2°. Montrer que $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} \right) e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

3°. En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE N°2 : (06 points)

1°. a/ Prouver que $(3 + i\sqrt{3})^2 = 6 + 6i\sqrt{3}$.

b/ Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + (5 - i\sqrt{3})z + 4 - 4i\sqrt{3} = 0$.

2°. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points

A , B et C d'affixes respectives $z_A = -4$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -i z_B$.

a/ Calculer $|z_B|$, $|z_C|$ et déterminer la forme cartésienne de $\frac{z_B}{z_C}$.

b/ En déduire la nature du triangle OBC .

3°. Soit D le point d'affixe $z_D = (1 - i)z_B$.

a/ Montrer que le quadrilatère $OCDB$ est un carré .

b/ Montrer que $\text{Aff}(\overline{AB}) = \sqrt{3} z_C$.

c/ En déduire que les points A , B et D sont alignés .

EXERCICE N°3 : (06 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \frac{1 + 2x^2}{1 + x^2}$.

1°. a/ Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b/ Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, 2[$.

2°. a/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 1 et préciser l'intervalle sur lequel elle est dérivable .

b/ Dresser le tableau de variation de f^{-1} .

3°. Déterminer pour tout $x \in [1, 2[$ l'expression de $f^{-1}(x)$.

EXERCICE N°4 : (05 points)

Soit la fonction g définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \frac{1}{\sin x}$.

1°. Dresser le tableau de variation de g .

2°. Montrer que g réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

3°. Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J puis calculer $(g^{-1})'(x)$ pour $x \in J \setminus \{1\}$.