

Lycée	Feriana
Prof	Hamdi Mabrouk
Devoir	Mathématiques



Devoir de synthèse 1



4^{ème} Sc Exp

Durée Durée :

22/12/2016



Mathématiques



Exercice 1



Pour chacune des affirmations, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur $[-1, 2]$ vérifiant pour tout $x \in]-1, 2[$, $f'(x) \leq \frac{1}{2}$

- 1) Il existe $\alpha \in]-1, 2[$ tel que $3f'(\alpha) - 2f(2) + f(-1) = 0$.
- 2) Pour tout $x \in [-1, 2]$: $|f(x) - f(2)| \leq \frac{1}{2}|x|$.
- 3) On suppose de plus que $f(-1)=0$ et $f(2)=1$
alors l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\beta \in]-1, 2[$.

Exercice 2

On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- 1) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_n < 3$
- 2) a) Montrer que (u_n) est une suite croissante.
b) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.
- 3) Soit la suite v définie sur \mathbb{N} par $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$.
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$.
b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
c) En déduire la limite de la suite (u_n) .
- 4) Soit $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$, exprimer S_n en fonction de n .

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right)$

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Vérifier que $f'(x) = \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ pour tout réel x .

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

d) Donner l'équation de la tangente à (C_f) au point $I(0, f(0))$.

2) Soit h la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par $h(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ h(0) = -1 & \end{cases}$

- a) Montrer que h est continue sur $]-\infty, 0]$.
- b) Montrer que $h'(x) = xf'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$
- c) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ il existe $c \in]x, 0[$ tel que $\frac{h(x)+1}{x} = cf'(c)$.
- d) En déduire que h est dérivable à gauche en 0 et calculer $h'_g(0)$.

Exercice 4

- 1) Pour tout nombre complexe z on pose $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$.
- a) Calculer $P(1)$.
- b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$.
- c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. On note $z_0 ; z_1$ et z_2 les solutions de (E) telles que : $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_0) < \text{Im}(z_2)$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) .

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_B = z_1 - i$ et $z_C = z_2 + 1$.

- a) Vérifier que $z_B = 3 - 3i$ et que $z_C = 4 + 2i$, puis placer les points A, B et C dans le repère (o, \vec{u}, \vec{v}) .
- b) Déterminer la nature du triangle ABC.
- c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre $z \neq 3 - 3i$; on pose : $f(z) = \frac{z - 4 - 2i}{z - 3 + 3i}$

- a) Vérifier que $f(z_D) = -i$ et interpréter graphiquement le résultat .
- b) Déterminer et construire Γ_1 , l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.
- c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.
- d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$.
- e) Vérifier que les trois ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 passent par les points A et D.

