MR : GARY *Lycée : Mourouge 2*	***Devoir de synthèse n° :2*** ***Mathématiques*** ***Durée : 3 heures***	**Classe : 4ème sc : 1** ***Date: 07/03/2012***

Exercice n°1(3 pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse .

-1- Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $\int_1^x \ln(t)dt \geq 0$.

-2- Soit f une fonction continue sur un intervalle I , si f est impaire alors pour tout x$\in I$: $\int_0^x f(t)dt =$ - $\int_0^{-x} f(t)dt$

-3- Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace orienté , si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{w}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont colinéaires.

Exercice n°2(4 pts)

Dans l'espace rapport à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on donne les points A(1,-1,1) , B(1,0,0) ,C(-1,01) et D(1,-1,0).

-1- a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que A , B et C déterminent un plan P.

c) Déduire une équation cartésienne de P .

d) Calculer le volume du tétraèdre ABCD .

-2- Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 + y - z - 1 = 0$

a) Montrer que S est la sphère de centre I (0 , $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$) et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

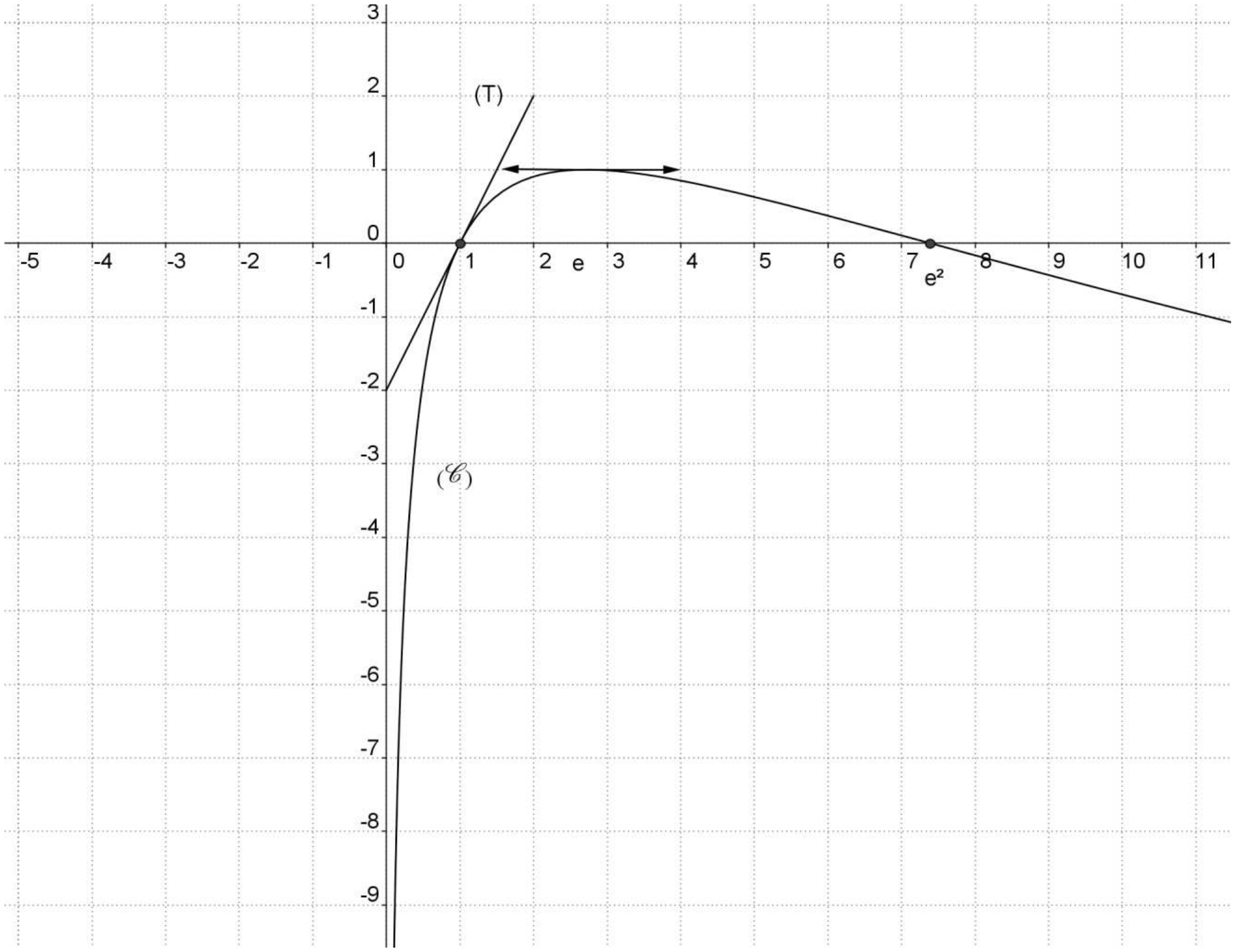
b) Montrer que P et S sont sécantes.

c) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC .Montrer que S $\cap$ P = $(\mathcal{C})$

-3- a) Vérifier que S est la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD .

b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à S au point D .

Exercice n°3(4pts)



Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par f(x) = (a + b ln(x))ln(x) , ou a et b sont des réels . La figure ci – dessus est la représentation graphique de la fonction f , relativement à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.$(\mathcal{C})$ admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique dont la direction est cele de la droite $(O,\vec{\imath}\,)$.

-1- Par lecture graphique , déterminer .

a) f ’(1) ; f ’(e) ; f (e²) et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau des variations de f .

-2- a) Montrer que f ’(x) = $\frac{a+2b\ln(x)}{x}$

b) Déterminer a et b

-3- Soit la fonction g définie par g(x) = -x(2-ln(x))² . Montrer que g est une primitive de f sur $]0,+\infty[$

Exercice n°4(5pts)

A) Soit g la fonction définie sur IR_+^* par $g(x) = 2x \ln x - x - 1$

1°/ a) Calculer la limite de g en $+\infty$.

b) Dresser le tableau des variations de g.

2°/ a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet, dans IR_+^* , une solution unique α, vérifier que : $2 < \alpha < 2,1$.

b) Donner le signe de $g(x)$ sur IR_+^* .

B) Soit f la fonction définie sur IR_+ par :

$f(x) = x^2 (\ln x - 1) - x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i} ; \vec{j})$.

1°/ a) Montrer que f est continue à droite en zéro

b) Montrer que f est dérivable à droite en zéro. Ecrire une équation de la demi-tangente (T) à (C_f) à droite au point O.

2°/ a) Montrer que ; $\forall x > 0$ on a : $f'(x) = g(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Dresser le tableau des variations de f, montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + \alpha}{2}$.

3°/ Soit D la droite d'équation : $y = -x$.

a) Etudier les positions relatives de (C_f) et D.

b) Tracer (C_f) et D dans le même repère $(O, \vec{i} ; \vec{j})$ (on prendra $\alpha \approx 2$).

4°/ On pose $F(x) = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 4)$; $\forall x \in IR_+^*$. Calculer la dérivée de F. En déduire la primitive de la fonction $h: x \mapsto f(x) + x$ sur IR_+^* qui s'annule en 1.

Exercice n°5(4pts)

(U_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{4U_n} \end{cases}$ $, \forall n \in \mathbb{N}^*$

-1- a) Calculer U_2 et U_3

b) Montrer que , $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leq U_n \leq 4$

c) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite est convergente et calculer sa limite L .

-2- Soit (V_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = \ln\left(\frac{U_n}{4}\right)$.

a) Déterminer que V_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ .préciser son premier terme V_1 .

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

c) Calculer la limite de la suite (V_n) et retrouver la limite de la suite (U_n).